Un corrigé de l'examen du 14/12/2018

Exercice 1.

1. *On considère le polynôme $Q(u) := u^2 + u - 1$, où $u \in \mathbb{R}$. Déterminez les racines de Q, notées u_+ et u_- de façon telle que $u_- < 0 < u_+$.*

   Le discriminant de Q est $\Delta = 1 + 4 = 5$.

   Les racines de Q sont donc : $\boxed{u_- = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \text{ et } u_+ = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$.

2. *On considère le polynôme $P(z) := z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$, où $z \in \mathbb{C}$. Simplifier $(z-1)P(z)$ de manière à obtenir une quantité étudiée en cours. En déduire les formes exponentielles des solutions complexes de l'équation $P(z) = 0$.*

   On a : $(z-1)P(z) = (z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1) = (z^5+z^4+z^3+z^2+z)-(z^4+z^3+z^2+z+1)$.
   D'où : $\boxed{(z-1)P(z) = z^5 - 1}$.

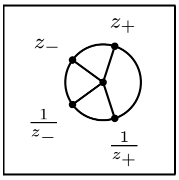
   Par ailleurs, on a : $P(1) = 5$, donc $P(1) \neq 0$.
   On en déduit que : $P(z) = 0 \iff \big(z \neq 1 \text{ et } (1-z)P(z) = 0\big) \iff \big(z \neq 1 \text{ et } z^5 = 1\big)$.
   Or, d'après le cours, les racines 5^{e} de l'unité sont : $\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi k}{5}}$ avec $k \in \{0, 1, \ldots, 4\}$.
   D'où : $\boxed{\text{les racines de } P \text{ dans } \mathbb{C} \text{ sont } \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{5}},\ \mathrm{e}^{\frac{4\mathrm{i}\pi}{5}},\ \mathrm{e}^{\frac{6\mathrm{i}\pi}{5}},\ \mathrm{e}^{\frac{8\mathrm{i}\pi}{5}}}$.

3. *Montrez qu'il existe deux racines de P, notées z_+ et z_-, telles que, d'une part,* $\mathrm{Re}\, z_+ > 0$ *et* $\mathrm{Im}\, z_+ > 0$ *et, d'autre part,* $\mathrm{Re}\, z_- < 0$ *et* $\mathrm{Im}\, z_- > 0$.
   Représenter sur une figure les racines du polynôme P en indiquant les points qui correspondent aux nombres z_+, $\frac{1}{z_+}$, z_- et $\frac{1}{z_-}$.

   On pose : $z_+ = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{5}} = \cos(\frac{2\pi}{5}) + \mathrm{i}\sin(\frac{2\pi}{5})$ et $z_- = \mathrm{e}^{\frac{4\mathrm{i}\pi}{5}} = \cos(\frac{4\pi}{5}) + \mathrm{i}\sin(\frac{4\pi}{5})$.
   On a : $0 < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2} < \frac{4\pi}{5} < \pi$, donc $\boxed{\mathrm{Re}\, z_+ > 0 \text{ et } \mathrm{Im}\, z_+ > 0,\ \mathrm{Re}\, z_- < 0 \text{ et } \mathrm{Im}\, z_- > 0}$.

   En outre, on a : $\frac{1}{z_+} = \mathrm{e}^{\frac{-2\mathrm{i}\pi}{5}} = \mathrm{e}^{\frac{8\mathrm{i}\pi}{5}}$ et $\frac{1}{z_-} = \mathrm{e}^{\frac{-4\mathrm{i}\pi}{5}} = \mathrm{e}^{\frac{6\mathrm{i}\pi}{5}}$.

   On place les racines de P sur le cercle trigonométrique :



4. *On note $T : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ l'application définie par $T(z) = z + \frac{1}{z}$.*
   Calculer $Q\big(T(z)\big)$ et justifier rigoureusement que l'ensemble des solutions de l'équation $Q\big(T(z)\big) = 0$ coïncide avec l'ensemble des racines de P.

   Si $z \neq 0$: $Q(T(z)) = Q(z + \frac{1}{z}) = (z + \frac{1}{z})^2 + (z + \frac{1}{z}) - 1 = (z^2 + 2 + \frac{1}{z^2}) + (z + \frac{1}{z}) - 1$
   donc $Q(T(z)) = \frac{z^4+z^3+z^2+z+1}{z^2} = \frac{P(z)}{z^2}$.
   Par ailleurs, on a : $P(0) = 1$, donc $P(0) \neq 0$.
   On en déduit que : $\boxed{P(z) = 0 \iff \big(z \neq 0 \text{ et } Q(T(z)) = 0\big)}$.

5. *Exprimer u_+ et u_- en fonction de z_+ et z_-. En déduire une expression pour* $\cos(\frac{2\pi}{5})$.

   On utilise les questions 1 et 4 : $Q(T(z_-)) = Q(T(z_+)) = 0$ donc $T(z_-), T(z_+) \in \{u_-, u_+\}$.
   Or : $T(z_-) = z_- + \frac{1}{z_-} = 2\cos(\frac{4\pi}{5}) < 0$ et $T(z_+) = z_+ + \frac{1}{z_+} = 2\cos(\frac{2\pi}{5}) > 0$.

   Finalement : $\boxed{u_- = z_- + \frac{1}{z_-} \text{ et } u_+ = z_+ + \frac{1}{z_+}}$ puis $\boxed{\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{1}{2}u_+ = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}}$.

Exercice 2.

Soit S_α le système d'équations d'inconnues réelles x, y, z et t suivant :

$$\begin{cases} 2\,x+y+z-2\,t=1 \\ -3\,x+y-4\,z-2\,t=1 \\ x-y+2\,z+2t=\alpha \end{cases}$$

où α est un paramètre réel.
On note A_α l'ensemble des solutions du système d'équations S_α.

1. *Montrer que A_α n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.*

   On a : $(0,0,0,0) \notin A_\alpha$ car $2{\times}0+0+0-2{\times}0 \neq 1$.

   Donc : $\boxed{A_\alpha \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^4}$.

2. *Résoudre S_1 et en déduire A_1.*

   On résout S_1 par la méthode du pivot de Gauss :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{L_2' = 2L_2+3L_1 \\ L_3' = 2L_3 - L_1}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & -10 & 5 \\ 0 & -3 & 3 & 6 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3' = 5L_3+3L_2]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \end{array}\right).$$

   La ligne $(0\;0\;0\;0\,|\,20)$ montre qu'il n'y a pas de solution : $\boxed{A_1 = \emptyset}$.

3. *Déterminer, en le justifiant, les valeurs de α pour lesquelles $A_\alpha \neq \emptyset$.*

   On étudie S_α par la méthode du pivot de Gauss, en reprenant le calcul du (a) :

$$\left(\begin{array}{c|c} //////// & 1 \\ //////// & 1 \\ //////// & \alpha \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{L_2' = 2L_2+3-L_1 \\ L_3' = 2L_3 - L_1}]{} \left(\begin{array}{c|c} /////// & 1 \\ /////// & 5 \\ /////// & 2\alpha-1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3' = 5L_3+3L_2]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10\alpha+10 \end{array}\right).$$

   La ligne $(0\;0\;0\;0\,|\,10\alpha+10)$ montre que : $\boxed{A_\alpha \neq \emptyset \text{ si et seulement si } \alpha = -1}$.

4. *Lorsque $A_\alpha \neq \emptyset$, donner une expression paramétrique (ou équation paramétrique) de A_α.*

   On suppose que $\alpha = -1$ et termine la résolution de S_α par « remontée triangulaire » :

$$S_\alpha \iff \begin{cases} x = \frac{1}{2}(-y-z+2t+1) \\ y = \frac{1}{5}(5z+10t+5) \end{cases} \text{ donc } \boxed{A_{-1} : \begin{cases} x = & -u \\ y = & u+2v+1 \\ z = & u \\ t = & v \end{cases} \text{ où } u \text{ et } v \text{ décrivent } \mathbb{R}}.$$

Exercice 3.

Soit F la partie de $\mathbb{R}^3$ donnée par l'équation paramétrique

$$\begin{cases} x = l - 2\,m \\ y = -l + m \\ z = 3\,l - m \end{cases}$$

où l et m sont des paramètres réels.

1. *Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.*

   Par définition de l'ensemble des combinaisons linéaires de deux vecteurs, on a : $F = \operatorname{Vect}\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)\right)$, donc $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3}$.

2. *On pose $u_1 := (1, -1, 3)$ et $u_2 := (-2, 1, -1)$. Montrer que (u_1, u_2) est une base de F puis donner la dimension de F .*

   La famille (u_1, u_2) est libre car u_1 et u_2 sont non-colinéaires. D'après la question 1, la famille (u_1, u_2) est aussi génératrice de F. D'où : $\boxed{(u_1, u_2) \text{ est une base de } F \text{ et } \dim F = 2}$.

3. *Déterminer une équation cartésienne de F.*

   Soit $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Le vecteur v appartient à F si et seulement si l'équation $lv_1 + mv_2 = v$ d'inconnue $(l, m) \in \mathbb{R}^2$ a au moins une solution. Étude par la méthode du pivot de Gauss :

   $$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} l & m \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & x \\ -1 & 1 & y \\ 3 & -1 & z \end{array}\right) \end{array} \xrightarrow[\substack{L_2' = L_2 + L_1 \\ L_3' = L_3 - 3L_1}]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & x \\ 0 & -1 & x + y \\ 0 & 5 & -3x + z \end{array}\right) \xrightarrow[L_3' = L_3 + 5L_2]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & x \\ 0 & -1 & x + y \\ 0 & 0 & 2x + 5y + z \end{array}\right).$$

   Donc : $\boxed{F \text{ a pour équation cartésienne } 2x + 5y + z = 0}$.

4. *On pose $v := (5, -1, -5)$. Montrer que $v \in F$.*
   La famille (u_1, u_2, v) est-elle libre ? Justifier.

   Le vecteur v vérifie l'équation cartésienne de F car : $2{\times}5 + 5{\times}(-1) + (-5) = 0$.
   On a bien : $\boxed{v \in F}$.

   La famille (u_1, u_2, v) est formée de 3 vecteurs de l'espace vectoriel F qui est de dimension 2.
   Par conséquent : $\boxed{\text{la famille } (u_1, u_2, v) \text{ n'est pas libre}}$.

Exercice 4.

Préciser si, dans chacun des cas suivants, le sous-ensemble A admet une borne supérieure réelle, une borne inférieure réelle (on ne demande pas de les calculer lorsqu'elles existent). Justifier, si besoin à l'aide d'un tableau de variation, chaque réponse.
(a) $A := \{x \in \mathbb{R};\, x^2 \leq 50\}$; ***(b)*** $A := \{x \in \mathbb{R};\, 0 \leq \mathrm{e}^x < 1\}$; ***(c)*** $A := \{x \in \mathbb{R};\, x^2 + 1 \leq \frac{1}{2}\}$.

Tout d'abord, on sait que toute partie non vide majorée (respectivement : minorée) de $\mathbb{R}$ a une borne supérieure (respectivement : une borne inférieure).

(a) La partie A est bornée, car on a $|x| \leq \sqrt{50}$ pour tout $x \in A$. Elle est non vide car $0 \in A$.
Donc : $\boxed{A \text{ admet une borne inférieure et une borne supérieure}}$.

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $x \in A \iff 0 \leq \mathrm{e}^x < 1 \iff \mathrm{e}^x < 1 \iff x < \ln 1$.
Donc $A =]-\infty, 0[$. La partie A est majorée par 0. Si A admet un minorant m de A, on a $m \leq x$ pour tout $x \in]-\infty, 0[$ et en passant à la limite $x \to -\infty$ on obtient une contradiction.
Par conséquent : $\boxed{A \text{ n'a pas de borne inférieure et } A \text{ admet une borne supérieure}}$.

(c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x^2 \geq 0$ et aussi : $x \in A \iff x^2 \leq -\frac{1}{2}$. Donc $A = \emptyset$. Ainsi tous les réels sont minorants et majorants de A. Comme $\mathbb{R}$ n'a ni plus petit élément, ni plus grand élément, on en déduit que : $\boxed{A \text{ n'a pas de borne inférieure et } A \text{ n'a pas de borne supérieure}}$.

Exercice 5.

(A) *Donnez la définition d'un sous-ensemble dense dans* $\mathbb{R}$.

Soit $A \subseteq \mathbb{R}$. On dit que A est dense dans $\mathbb{R}$ si pour tous $x_0 \in \mathbb{R}$ et toute partie V de $\mathbb{R}$ pour laquelle il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\subseteq V$ (« voisinage de x_0 »), on a $V \cap A \neq \emptyset$.

(B) *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite décroissante à valeurs dans* $\mathbb{R}$. *Que peut-on dire sur sa limite, si elle existe, si l'on fait les hypothèses suivantes ?*

1. *on suppose que cette suite est minorée ;*

   On a : $\boxed{\text{toute suite décroissante à valeurs dans } \mathbb{R} \text{ et minorée a une limite dans } \mathbb{R}}$.

2. *on suppose que cette suite est non minorée.*

   On a : $\boxed{\text{toute suite décroissante à valeurs dans } \mathbb{R} \text{ et non minorée a pour limite } -\infty}$.