Etude d'ensembles associés à une fonction
Fiche-réponses

1. Domaine de définition d'une fonction à deux variables

   1.1 La fonction f n'est pas définie sur l'ensemble:

   $$\{(u,v) \in \mathbf{R}^2, u = v\}$$

   Le domaine de $f1$ est: $\mathbf{R}^2$
   Equation cartésienne de $f1^{-1}(\{1/2\})$:

   $$(u-v)^2 = 1 \Leftrightarrow u = v+1 \text{ ou } u = v-1$$

   Instruction MAPLE pour le tracé de cet ensemble:

   $$\text{implicitplot}((u-v)^2 = 1, u = -2..2, v = -2..2);$$

   Description de $f1^{-1}(]0,1])$: $\mathbf{R}^2$
   1.2 Equation cartésienne de l'ensemble des couples où g n'est pas définie: $sin(2u) = cos(v)$
   Equations des droites:

   $$v = -2u - \pi/2 + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z} \text{ ou } v = 2u - \pi/2 - 2k'\pi,\ k' \in \mathbf{Z}$$

2. Image d'une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R^2}$.

   2.1 L'intervalle I est: $[0,\pi]$

   Instruction MAPLE qui trace le graphe de h:

   $$\text{spacecurve}([t, cos(t), sin(2t)], t = 0..2\pi);$$

   Quel choix de l'orientation permet aussi de visualiser $h(\mathbf{R})$:

   $$\text{spacecurve}([t, cos(t), sin(2t)], t = 0..2\pi, \text{orientation} = [90,0]);$$

   $h1^{-1}(\mathbf{R}^+) = [\mathbf{-1},\mathbf{1}]$

   Si (x,y) satisfait (E) alors $(x,y) \in h(\mathbf{R})$ car:
   $x \in h1^{-1}(\mathbf{R}^+)$, donc $\exists t \in [0,2\pi[$ tel que $x = \cos(t)$. Alors $y^2 = 4(\cos^2(t) - \cos^4(t)) = \sin^2(2t)$, d'où $y = \sin(2t)$ ou $y = -\sin(2t)$. Finalement $(x,y) = h(t)$ ou $(x,y) = h(-t)$.
   2.2 La projection de $k(\mathbf{R})$ sur xOy est:

un cercle de rayon 1 de centre O.

La surface sur laquelle est tracé $k(\mathbf{R})$ est un cylindre d'équation $x^2 + y^2 = 1$, z quelconque.

La relation entre $k(\mathbf{R})$ et $h(\mathbf{R})$: $h(\mathbf{R})$ est la projection de $k(\mathbf{R})$ sur le plan yOz.