Etude d'ensembles associés à une fonction

1. Domaine de définition d'une fonction à deux variables
   1.1 Définir avec MAPLE la fonction de $\mathbf{R^2}$ dans $\mathbf{R}$ suivante:
   $$f:(u,v)\mapsto \frac{1}{(u-v)^2}$$
   Quels sont les couples (u,v) pour lesquels f n'est pas définie. Tracer par MAPLE l'ensemble de tous ces couples.
   On définit maintenant la fonction f1:
   $$f1:(u,v)\mapsto \frac{1}{(u-v)^2+1}$$
   Quel est le domaine de définition de f1?
   Donner une équation cartésienne de l'image réciproque par f1 des ensembles $\{2\}$,$\{1\}$,$\{1/2\}$,$\{0\}$.
   De quels objets géométriques s'agit-il? En donner un tracé satisfaisant par MAPLE.
   Décrire géométriquement $f1^{-1}([1/2,1])$ et $f1^{-1}(]0,1])$.
   Comment peut s'interprêter l'ensemble des couples pour lesquels f n'est pas définie grâce à la fonction f1?

   1.2 On considère maintenant la fonction
   $$g:(u,v)\mapsto \frac{1}{(sin(2u)-cos(v))^2}$$
   Donner une équation cartésienne simplifiée de l'ensemble des couples où g n'est pas définie.
   Décrire géométriquement cet ensemble
   Trouver une forme paramétrique de cet ensemble.
2. Image d'une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R^2}$.
   2.1 On considère la fonction
   $$h:t\mapsto \begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(2t)\end{pmatrix}$$
   Définir l'image de h. Trouver un intervalle I de longueur fini tel que $h(I)=h(\mathbf{R})$.
   Tracer $h(I)$ avec MAPLE .
   Définir et tracer dans $\mathbf{R^3}$ le graphe de h. Quelle opération géométrique permet de passer du graphe de h à $h(\mathbf{R})$?

Quel choix de l'orientation du graphe de h permet de visualiser $h(\mathbf{R})$? Montrer que $h(\mathbf{R})$ est un sous-ensemble des points du plan satisfaisant l'équation (E) $y^2 = 4(x^2 - x^4)$.
Etudier la fonction $h1 : x \mapsto 4(x^2 - x^4)$. Déterminer l'image réciproque par $h1$ des réels positifs.

Attention, question difficile: Montrer que si (x, y) satisfait (E) alors $y \in [-1, 1]$. En déduire que si (x, y) satisfait (E), c'est un point de $h(\mathbf{R})$.

2.2 On considère maintenant

$$k : t \mapsto \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}$$

Choisir un intervalle I tel que $k(I) = k(\mathbf{R})$. Tracer $k(I)$.
Quel est la projection de $k(\mathbf{R})$ sur le plan $x0y$. Sur quelle surface de $\mathbf{R^3}$ est tracé $k(\mathbf{R})$.
Quelle est la relation entre $k(\mathbf{R})$ et $h(\mathbf{R})$, faire un tracé avec MAPLE qui illustre cette relation.

Remarque: On pourrait faire une étude similaire avec $g1(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(3t) \end{pmatrix}$, $g2(t) = \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \sin(3t) \end{pmatrix}$.