TP no 4: Racines de polynomes et algèbre linéaire

```
> with(linalg): # Valider cette ligne.
```

Il faut donner la réponse sur le papier aux questions écrites avec un mot en gras.

1. On définit par récurrence des polynomes P0(t)=P1(t)=1, Pn+1(t)=Pn(t)-t*Pn-1(t).
Calculer à la main P2, P3,P4 et P5.

2. Trouver avec Maple leurs racines, tracer leur graphe (en utilisant solve et plot).

>

>

3. Avec la procedure jones qui calculent les polynomes Pn, **conjecturer** le degré de Pn et le coefficient du terme de plus haut degré.

```
> jones:=proc(n) if n=0 then 1 elif n=1 then 1 else
  jones(n-1)-t*jones(n-2) fi end; # A valider.
```

>

>

4. On s'interesse à la première racine positive. Avec fsolve et la procedure jones, **donner** conjecturalement une limite quand n tend vers l'infini pour la première racine positive.

>

>

On définit maintenant les vecteurs $Xn = \begin{bmatrix} Pn+1 \\ Pn \end{bmatrix}$ et la matrice A:

```
> A:=matrix(2,2,[1,-t,1,0]); # A valider.
```

5. **Verifier** que Xn+1=AXn et **calculer** Xn+1 en fonction de A et X0.

6. **Comment** obtenir Pn avec A et X0? Vérifier pour n<10 la coincidence des calculs avec la procédure Jones (la puissance nième d'une matrice
se calcule par &^).

>

>

>

7. Nous faisons le changement de variable $t := \frac{1}{(2\cos(x))^2} = \frac{1}{(\mathbf{e}^{(x\,I)} + \mathbf{e}^{(-x\,I)})^2}$.

Proposer une formule conjecturale pour la première solution positive de Qn(x)= $\mathrm{Pn}\left(\frac{1}{(2\cos(x))^2}\right)$

Pour cela vous pouvez, pour $n \le 5$, calculer Qn à partir de la matrice B et de l'idée de la précédente question et utiliser solve.

```
> B:=matrix(2,2,[1,-1/(2*cos(x))^2,1,0]);
```

>

>

8. **Trouver** une colonne C1 non nulle telle que C.C1=$\frac{e^{(x\,I)}}{e^{(x\,I)}+e^{(-x\,I)}}$C1 avec gausselim et la matrice C (autre forme de la matrice B).

```
> C:=matrix(2,2,[1,-1/(exp(x*I)+exp(-x*I))^2,1,0]);
>
>
```

9. **Trouver** une colonne C2 non nulle telle que C.C2=$\frac{e^{(-x\,I)}}{e^{(x\,I)}+e^{(-x\,I)}}$C2 avec gausselim

```
>
>
```

10. **Quelle est** la relation entre C1 et C2?

11. Former la matrice U=[C1,C2], calculer son inverse. Vérifier le calcul de Maple en calculant U&*inverse(U).

```
>
>
>
```

Calculer D1:=inverse(U)*C*U. **Quelle est** la propriété de la matrice D1?

```
>
>
```

12. **Exprimer** Qn en fonction de n, D1, et U, puis de n,x et U.

13. **Donner** les instructions Maple qui vous permettent de conclure que x=Pi/(n+1) est la première racine positive de Qn.

```
>
>
>
>
>
```

14. Vérifier que pour n=6, Maple était incapable de simplifier le calcul formellement (essayer aussi n=10).

```
> simplify(subs(t=1/(2*(cos(Pi/7)))^2,jones(6)));
>
>
```