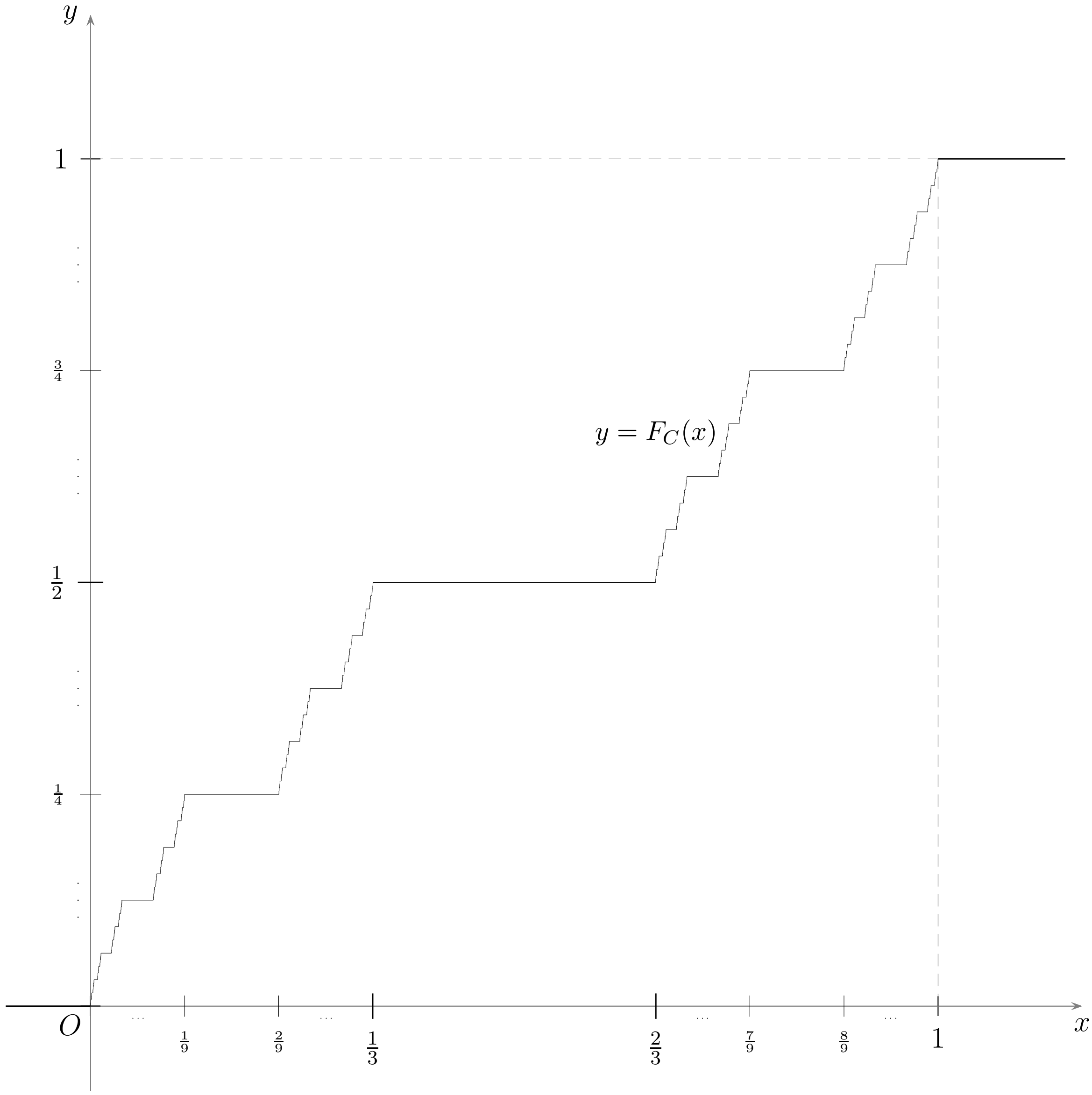
L'escalier de Cantor (découvert en 1885 par Ludwig Scheeffer qui était un élève de Cantor) est le graphe suivant d'une certaine application continue $F_C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante de 0 à 1 :



Comme F_C est continue à droite et croissante de 0 à 1, il existe une variable aléatoire réelle C qui a pour fonction de répartition F_C.

L'application F_C est dérivable « presque partout »$^{(\star)}$ avec une dérivé nulle. En un certain sens, on a : $\int_{-\infty}^{+\infty} F_C'(t)\,\mathrm{d}t = 0 < 1$, le problème venant du fait que F_C' *n'est pas définie partout.*
[Toute application dérivable $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ et de dérivée bornée vérifie $\int_a^b F'(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$.]

Un résultat délicat permet d'en déduire que C n'a pas de densité.
[Si $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est « intégrable au sens de Lebesgue », alors $p(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\int_{-\infty}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t\big)$ presque partout.]
On dispose d'ailleurs d'un critère étonnant : une variable aléatoire réelle X possède une densité si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{F_X'(t)}_{\text{défini presque partout et positif}}\,\mathrm{d}t = 1$; dans ce cas, F_X' est une densité de X.

(⋆) On dit qu'une propriété portant sur $x \in \mathbb{R}$ est vérifiée « presque partout » si l'ensemble des points où elle n'est pas vérifiée est pour tout $\varepsilon > 0$ inclus dans une réunion d'intervalles ouverts deux à deux disjoints dont la somme des longueurs est strictement inférieure à ε.