I. Rappels : variables aléatoires réelles

Variables aléatoires discrètes : exemples

1) Soit X une v. a. r. à valeurs dans $\mathbb{N}$ qui suit une loi géométrique : $X \sim \mathcal{G}(p)$ $(0 < p < 1)$.
   a) Démontrer que X a un moment d'ordre 1 et calculer $\mathrm{E}(X)$.
   b) Soit $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Démontrer que la v. a. r. $X(X-1)...(X-r+1)$ a un moment d'ordre 1 et calculer $\mu_r(X) := \mathrm{E}(X(X-1)...(X-r+1))$ « moment factoriel d'ordre r de X ».

2) Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $p \in \,]0,1[$ et $q = 1-p$.
   a) Démontrer qu'il existe une probabilité P sur l'espace mesurable $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ telle que $P(\{k\}) = \binom{-n}{k} p^n (-q)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, où $\binom{-n}{k} := \frac{-n(-n-1)\cdots(-n-k+1)}{k!} = (-1)^k \binom{n+k-1}{n-1}$ « loi binomiale négative $\mathcal{B}^-(n,p)$ de paramètres n et p ».
   Indication : utiliser le DSE $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x \in \,]-1,1[$.
   b) Que représente $\mathcal{B}^-(1,p)$?

3) Un joueur lance une pièce (éventuellement non équilibrée) à répétition$^{(\star)}$.
   a) On se place dans le cas où le joueur lance la pièce jusqu'à ce qu'il obtienne « pile » pour la 1ère fois. Quelle est la loi du nombre T de lancers qu'il a effectués ?
   b) Plus généralement, étant donné $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, quelle est la loi du nombre T_r de lancers que le joueur va effectuer jusqu'à obtenir r fois le résultat « pile » (on pourra considérer $T_r - r$) ?
   Indication : pour tout $n \geq r$, on a $\{T_r = n\} = \{S_{n-1} = r-1, X_n = 1\}$ où $S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Variables aléatoires discrètes : fonctions génératrices (X et Y v. a. à valeurs $\mathbb{N}$)

4) a) Soit $t \in [-1,1]$. Montrer que la série $\left(\sum P(X=n)\, t^n\right)_{n \geq 0}$ est convergente.
   On pose : $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)\, t^n$ pour tout $t \in [-1,1]$.
   b) Montrer que X et Y ont même loi si et seulement si $G_X = G_Y$.

5) Calculer G_X lorsque :
   (a) $X \sim \mathcal{B}(p)$; (b) $X \sim \mathcal{B}(n,p)$; (c) $X \sim \mathcal{G}(p)$; (d) $X \sim \mathcal{B}^-(n,p)$; (e) $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

6) a) On fixe $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ dans tout l'exercice. Calculer $G_X^{(r)}(t)$ pour $t \in \,]-1,1[$ à l'aide de P_X.
   b) En s'inspirant de l'exercice 1, définir le « moment factoriel d'ordre r de X ». On le note $\mu_r(X)$.
   c) Vérifier que : $\mu_r(X) = \lim_{t \to 1^-} G_X^{(r)}(t)$ dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.
   Indication : si $\mu_r(X) < +\infty$, utiliser la convergence normale ; si $\mu_r(X) = +\infty$, fixer $A > 0$ puis $N \geq r$ tel que $\sum_{n=r}^{N} n(n-1)...(n-r+1)\, P(X=n) > 2A$ (ou utiliser le th. de Beppo Levi).
   d) Retrouver la valeur de $\mu_r(X)$ lorsque $X \sim \mathcal{G}(p)$.

7) a) Soit $t \in [-1,1]$. Montrer que t^X a un moment d'ordre 1 et que $G_X(t) = \mathrm{E}(t^X)$.
   b) Soient X_1, ..., X_k des v. a. à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendantes.
   Démontrer que : $G_{X_1 + \cdots + X_k} = G_{X_1} \cdots G_{X_k}$.
   c) Relier les résultats de 5 (b) et de 5 (d) à ceux de 5 (a) et de 5 (c).
   d) On suppose que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ avec X et Y indépendantes.
   Montrer directement ou à l'aide de (b) que : $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

$(\star)$ On admet que pour tout $p \in [0,1]$, il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de v. a. r. indépendantes sur Ω qui suivent toutes la loi $\mathcal{B}(p)$.

8) On lance deux dés à six faces et note X et Y les chiffres apparaissant sur les faces supérieures. On suppose les dés non-équilibrés (« pipés ») avec leurs faces numérotées de 1 à 6.
Vérifier tout d'abord qu'il existe $A, B \in \mathbb{R}_5[X]$ tels que :

$$G_X(t) = t\,A(t) \;\text{ et }\; G_Y(t) = t\,B(t) \;\text{ pour tout } t \in [-1,1].$$

En déduire en raisonnant par l'absurde et en utilisant l'existence d'une racine réelle de A, que $X+Y$ ne suit pas la loi uniforme sur $\{2,3,...,12\}$.

9) Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v. a. r. i. i. d. à valeurs dans $\mathbb{N}$ sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et une v. a. N à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendante de $(X_n)_{n\geq 1}$.

a) On pose : $S_N(\omega) = \underbrace{X_1(\omega) + \cdots + X_{N(\omega)}(\omega)}_{0 \text{ si } N(\omega)=0}$ pour tout $\omega \in \Omega$.
Calculer G_{S_N} $^{(\star\star)}$.

b) Quelle est la loi de S_N lorsque $X_1 \sim \mathcal{B}(p)$ et $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$?

Variable aléatoire à densité, simulation

10) Nous noterons $\mathcal{U}_{[a,b]}$ la loi uniforme sur un segment $[a,b]$ $(a<b)$.
Tracer le graphe de la fonction de répartition de cette loi.

11) Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ une densité de probabilité. On suppose que $f_{|\mathbb{R}^+}$ est continue et :

$$f(x) = 0 \;\text{ pour } x<0 \;\text{ et }\; f(x)>0 \;\text{ pour } x>0.$$

a) Montrer que la fonction de répartition $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ associée à la densité de probabilité f vérifie $F(x) = 0$ pour tout $x<0$ et $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $x \geq 0$.

b) Montrer que $F_{|\mathbb{R}^+}$ se restreint en une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}^+$ sur $[0,1[$.
Nous noterons $F^{-1}\colon [0,1[\to \mathbb{R}^+$ sa bijection réciproque (elle est aussi strictement croissante).

c) Soit $U \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$ une variable aléatoire réelle qui suit la loi uniforme sur $[0,1]$.
Justifier l'égalité suivante : $P(U \in [0,1[\,) = 1$.
Quitte à remplacer $U(\omega)$ par 0 quand $U(\omega) \notin [0,1[$, on peut supposer U à valeurs dans $[0,1[$.

d) On définit $X := F^{-1}(U)$ et admet que X est bien une variable aléatoire réelle.
Montrer que la fonction de répartition F_X de X vérifie $F_X(x) = 0$ pour tout $x<0$ et calculer la valeur de $F_X(x)$ pour $x \geq 0$.

e) Déduire des questions précédentes que X suit la loi de densité de probabilité f.

f) On suppose qu'un ordinateur « génère » un nombre réel aléatoire $U \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$.
Comment générer ensuite un nombre réel X tel que $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, où $\lambda > 0$?

12) On appelle *loi de Rayleigh* de paramètre $\alpha > 0$ et note $\mathcal{R}(\alpha)$ la loi de densité de probabilité $f_\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $f_\alpha(x) = 0$ si $x<0$ et $f_\alpha(x) = \frac{x}{\alpha^2}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}}$ si $x \geq 0$.

a) Vérifier que f_α est bien une densité de probabilité.

b) À partir de la simulation d'une variable aléatoire $U \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$, comment simuler une variable aléatoire X telle que $X \sim \mathcal{R}(\alpha)$?

13) On rappelle que la *loi de Cauchy* de paramètre $\lambda > 0$, notée $\mathcal{C}(\lambda)$, est la loi de probabilité de densité f_λ définie par : $f_\lambda(x) = \frac{\lambda}{\pi(\lambda^2+x^2)}$ pour $x \in \mathbb{R}$

À partir de la simulation d'une variable aléatoire $U \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$, comment simuler une variable aléatoire X telle que $X \sim \mathcal{C}(\lambda)$?
Indication : s'inspirer de la construction de l'exercice 11.

14) Soit $X \sim \mathcal{E}(\mu)$, avec $\mu > 0$. Déterminer la loi de $Y := \mathrm{e}^X$.
Indication : calculer la fonction de répartition de Y ou calculer $\mathrm{E}(h(Y))$.

$(\star\star)$ On admet que pour toute suite double $(u_{p,q})_{p,q\geq 0}$ de nombres complexes, on a
$\sum_{p=0}^{+\infty}\big(\sum_{q=0}^{+\infty} |u_{p,q}|\big) = \sum_{q=0}^{+\infty}\big(\sum_{p=0}^{+\infty} |u_{p,q}|\big) \leq +\infty$, et $\sum_{p=0}^{+\infty}\big(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}\big) = \sum_{q=0}^{+\infty}\big(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\big)$ quand $\sum_{p=0}^{+\infty}\big(\sum_{q=0}^{+\infty} |u_{p,q}|\big) < +\infty$.