Variables aléatoires réelles : à retenir

Définition (probabilité)

(a) La *somme* d'une famille dénombrable $(a_i)_{i\in I}$ de réels positifs est :

$$\underbrace{\sum_{i\in I} a_i}_{\text{indépendant du choix de la numérotation}} := \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\big(a_{i_0}+a_{i_0}+\cdots+a_{i_n}\big)}_{\text{croissant en } n} \in \mathbb{R}^+\cup\{+\infty\} \quad \text{où} \quad I=\{\underbrace{i_n}_{\text{distincts}}\,;\ n\in\mathbb{N}\}.$$

hors programme

(b) Une *probabilité* sur un $\underbrace{\text{ensemble } \Omega}_{\text{ensemble des « résultats possibles »}}$ est une application P qui à $\underbrace{\text{certaines parties } A}_{\text{« évènements »}}$ (il faudrait préciser) de Ω associe un réel $P(A)\in[0,1]$ de façon que :
$P(\Omega)=1$ et $P\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\big)=\sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$ quand A_n, $n\in\mathbb{N}$, sont des événements deux à deux disjoints.

(c) La probabilité uniforme sur un ensemble fini non-vide Ω est la probabilité P définie par :

$$P(A)=\frac{\operatorname{Card} A}{\operatorname{Card}\Omega} \quad \text{pour} \quad A\subseteq\Omega.$$

<u>Dans la suite</u> : on fixe une probabilité P sur un ensemble Ω (muni d'« évènements »).

Définition-Proposition (loi de probabilité d'une v. a. r. et fonction de répartition)

hors programme

(a) Une $\underbrace{\textit{variable aléatoire réelle}}_{\text{« v. a. r. »}}$ sur Ω est une application X de Ω dans $\mathbb{R}$ telle que pour tous $a,b\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ avec $a\le b$, l'ensemble $\underbrace{\{\omega\in\Omega \mid a\le X(\omega)\le b\}}_{\{a\le X\le b\}}$ est un évènement.

Sa *loi de probabilité* est la probabilité P_X sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$P_X([a,b])=P(a\le X\le b) \quad \text{dès que} \quad -\infty\le a\le b\le+\infty.$$

(b) On se donne une v. a. r. X sur Ω.
La *fonction de répartition* F_X *de* X, qui détermine la loi P_X de X, est définie par :

$$F_X(x)=P(X\le x) \quad \text{pour tout } x\in\mathbb{R}.$$

Ainsi l'application $F_X\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est continue à droite et croissante de $\underbrace{0}_{\text{en } -\infty}$ à $\underbrace{1}_{\text{en } +\infty}$ $^{(\star)}$.

Définition-Proposition (loi discrète et loi à densité)

On se donne une v. a. r. X sur Ω.

(a) On suppose ici que Ω est fini ou dénombrable, de la forme :

$$\Omega=\{\underbrace{\omega_n}_{\text{distincts}}\,;\ n\in\mathbb{N}'\} \quad \text{avec} \quad \mathbb{N}'=\{0,1,\dots,\underbrace{N}_{\text{fixé dans } \mathbb{N}}\} \quad \text{ou} \quad \mathbb{N}'=\mathbb{N}.$$

La donnée d'une probabilité Q sur $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega))$ équivaut à la donnée d'une suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ de réels positifs vérifiant $\sum_{n\in\mathbb{N}'} p_n=1$, au moyen des égalités suivantes : $p_n=Q(\{\omega_n\})$ pour tout $n\in\mathbb{N}'$.

(b) On dit que X est *discrète* s'il existe une suite de nombres réels de la forme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ avec $\mathbb{N}'=\{0,1,\dots,\underbrace{N}_{\text{fixé dans } \mathbb{N}}\}$ ou $\mathbb{N}'=\mathbb{N}$, telle que $\operatorname{Im} X\subseteq\{\underbrace{x_n}_{\text{distincts}}\}_{n\in\mathbb{N}'}$.

Dans ce cas P_X est déterminée par la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ suivante : $p_n=P(X=x_n)$ pour $n\in\mathbb{N}'$.

(c) On dit que X *admet pour densité une fonction (« mesurable »)* $p\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ si :

$$P(a\le X\le b)=\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{quand} \quad -\infty\le a\le b\le+\infty.$$

Ceci équivaut à : $F_X(x)=\int_{-\infty}^x p(t)\,\mathrm{d}t$ pour $x\in\mathbb{R}$. $\longleftarrow$[Donc : $p(x_0)=F'_X(x_0)$ si p est continu en un $x_0\in\mathbb{R}$.]

Une fonction mesurable $p\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ est associée à une telle X si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,\mathrm{d}x=1$.

(d) La v. a. r. X admet pour densité F'_X (définie sauf en a_1, ..., a_p) quand il existe $a_1<\cdots<a_p$ dans $\mathbb{R}$ tels que $F_X|_{]-\infty,a_1]}$, $F_X|_{[a_1,a_2]}$, ..., $F_X|_{[a_p,+\infty,a_1[}$ sont de classe C^1.

$(\star)$ Réciproquement, toute $F\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue à droite et croissante de 0 à 1 est une fonction de répartition.

Définition-Proposition (v. a. r. indépendantes)

(a) On dit que des v. a. r. X_1, ..., X_n sur Ω sont *indépendantes* si :

$P(X_1 \in B_1, ..., X_n \in B_n) \;=\; P(X_1 \in B_1) \dots P(X_n \in B_n)$ pour tous évènements $B_1, ..., B_n \subseteq \mathbb{R}$,
c'est-à-dire $P(X_1 \leq x_1, ..., X_n \leq x_n) \;=\; P(X_1 \leq x_1) \dots P(X_n \leq x_n)$ pour tous $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$.

Dans ce cas, pour $1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n$ et pour toutes fonctions (mesurables) $h_1 : \mathbb{R}^{i_1} \to \mathbb{R}$, ..., $h_k : \mathbb{R}^{i_k - i_{k-1}} \to \mathbb{R}$, les v. a. r. $h_1(X_1, ..., X_{i_1})$, ..., $h_k(X_{i_{k-1}+1}, ..., X_{i_k})$ sont aussi indépendantes.

(b) Quand X_1, ..., X_n sont discrètes, l'indépendance de X_1, ..., X_n équivaut à :
$P(X_1 = x_1, ..., X_n = x_n) \;=\; P(X_1 = x_1) \dots P(X_n = x_n)$ pour tous $x_1 \in \mathrm{Im}(X_1)$, ..., $x_n \in \mathrm{Im}(X_n)$.

(c) Plus généralement, on dira qu'une suite $(X_n)_{n \geq 0}$ de v. a. r. sur Ω est formée de v. a. r. indépendantes si : X_1, ..., X_n sont indépendantes pour tout $n \geq 0$.

Définition-Proposition (espérance)

On se donne deux v. a. r. X et Y sur Ω.

(a) On suppose X discrète.

On pose : $\mathrm{E}(|X|) = \sum_{n \in \mathbb{N}'} |x_n| \; P(X = x_n) \; \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

Lorsque $\underbrace{\mathrm{E}(|X|) < +\infty}_{\text{on dit que « } X \text{ a un moment d'ordre 1 »}}$, on définit *l'espérance de X* : $\mathrm{E}(X) = \overbrace{\sum_{n \in \mathbb{N}'} x_n \; P(X = x_n)}^{\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} x_n \; P(X = x_n) \text{ quand } \mathbb{N}' = \mathbb{N}}$.

(b) On suppose que X a une densité p.

On pose : $\mathrm{E}(|X|) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \; p(x) \, \mathrm{d}x \; \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

Lorsque $\underbrace{\mathrm{E}(|X|) < +\infty}_{\text{on dit que « } X \text{ a un moment d'ordre 1 »}}$, on définit *l'espérance de X* : $\mathrm{E}(X) = \overbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x \; p(x) \, \mathrm{d}x}^{\lim_{A \to +\infty} \int_{-A}^{A} x \; p(x) \, \mathrm{d}x}$.

(c) On peut construire $\mathrm{E}(|X|) \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, puis définir $\mathrm{E}(X) \in \mathbb{R}$ tel que $\boxed{|\mathrm{E}(X)| \leq \mathrm{E}(|X|)}$ lorsque $\mathrm{E}(|X|) < +\infty$, en généralisant (a) et (b) de façon que E soit $\underbrace{\text{croissante}}_{\text{cas } X \geq 0}$ et $\underbrace{\text{linéaire}}_{\text{cas où } \mathrm{E}(|X|) < +\infty}$ (unicité).

Les v. a. r. X et Y ont même loi si et seulement si $\mathrm{E}(h(X)) = \mathrm{E}(h(Y))$ pour tout $h \in \mathscr{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(d) On suppose que $\mathrm{E}(|X|) < +\infty$ et $\mathrm{E}(|Y|) < +\infty$. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

On a : $\mathrm{E}(1) = 1$ et $\mathrm{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda \, \mathrm{E}(X) + \mu \, \mathrm{E}(Y)$.

Quand X et Y sont indépendantes, on a : $\underbrace{\mathrm{E}(XY)}_{\text{existe}} = \mathrm{E}(X) \, \mathrm{E}(Y)$.

Définition-Proposition (variance)

On se donne deux v. a. r. X et Y sur Ω.

(a) On suppose que $\underbrace{\mathrm{E}(X^2) < +\infty}_{\text{on dit que « } X \text{ a un moment d'ordre 2 »}}$. Donc $\mathrm{E}(|X|) < +\infty$.

On définit *la variance* $\mathrm{Var}(X) = \underbrace{\mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2}_{\mathrm{E}\,((X - \mathrm{E}(X))2)}$ et *l'écart type* $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$ de X.

(b) On suppose que $\mathrm{E}(X^2) < +\infty$ et $\mathrm{E}(Y^2) < +\infty$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

On a : $\mathrm{Var}(\lambda X) = \lambda^2 \, \mathrm{Var}(X)$ et $\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2(\mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X) \, \mathrm{E}(Y))$.

Quand X et Y sont indépendantes, on a : $\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$.

Proposition (théorème de transfert et retour sur l'indépendance)

On se donne deux v. a. r. X et Y sur Ω.

(a) On suppose que X est discrète et somme sur « $x \in \mathbb{R}$ » au sens de « $x \in \mathbb{R}, P(X = x) \neq 0$ ».
On a : $\mathrm{E}(h(X)) = \sum_{x \in \mathbb{R}} h(x) \, P(X = x)$ pour $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ ou $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $\mathrm{E}(|h(X)|) < +\infty$.

(b) Soit $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ mesurable telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) \, \mathrm{d}x = 1$.

On a : X a pour densité p si et seulement si $\mathrm{E}(h(X)) \overset{(\star)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) p(x) \mathrm{d}x$ pour $h \in \mathscr{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Dans ce cas on a $(\star)$ pour $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ mesurable ou $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable et $\mathrm{E}(|h(X)|) < +\infty$.

(c) Les v. a. r. X et Y sont indépendantes si et seulement si :

$$\mathrm{E}\big(h(X) k(Y)\big) = \mathrm{E}(h(X)) \, \mathrm{E}(k(Y)) \quad \text{pour tous } h, k \in \mathscr{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$