II. Vecteurs aléatoires

Lois marginales, loi de Pareto

1) a) On pose : $p(x,y) = \frac{1}{\pi} \frac{y\mathrm{e}^{-y}}{x^2+y^2} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}}(y)$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Démontrer que p est une densité sur $\mathbb{R}^2$.
   b) Soit (X,Y) un couple aléatoire admettant pour densité p. Calculer la densité marginale de Y.

2) Soit (X,Y) un couple de v. a. r. qui possède une densité f. On suppose que : $f(x,y) = C\,\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}(x^2-xy+y^2)}$.
Calculer C, les lois marginales de X et Y, la matrice de covariance, dire si X et Y sont indépendantes.

3) Soient X et Y deux v. a. r. indépendantes telles que $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{E}(\mu)$, $\lambda > 0$ et $\mu > 0$.
   a) On pose $S := \inf(X,Y)$ et $T := |X-Y|$.
   Montrer que (S,T) a une densité, et calculer cette densité.
   b) Démontrer que S et T sont indépendantes, et calculer leur densité.

4) Soient $a > 0$ et $\lambda > 0$. On appelle *loi de Pareto* $P(a,\lambda)$ *de paramètres* a *et* λ la loi de probabilité de densité $f_{a,\lambda}$ définie par : $f_{a,\lambda}(x) = \frac{a\,\lambda^a}{x^{a+1}} \mathbb{1}_{[\lambda,+\infty[}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
Soit $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. La loi $P(a,\lambda)$ a-t-elle un moment d'ordre r ? Si oui, calculer ce moment m_r.

5) Soient X et Y deux v. a. r. indépendantes qui suivent une loi de Pareto $P(1,1)$.
   a) On pose $S := XY$ et $T := \frac{X}{Y}$.
   Montrer que (S,T) a une densité, que l'on calculera.
   b) Calculer les densités de S et T.
   c) En déduire que S et T ne sont pas indépendantes.
   Indication : on pourra considérer $P(1 < S < 2$ et $2 < T < 3)$.

6) *Méthode de Box-Muller.* Soient X et Y deux v. a. r. indépendantes de même loi uniforme sur $]0,1[$.
On pose $(S,T) := \big(\sqrt{-2\ln X}\cos(2\pi Y), \sqrt{-2\ln X}\sin(2\pi Y)\big)$.
Démontrer que S et T sont indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Lois Γ, lois du χ^2 et lois de Student

7) Soit X une v. a. r. admettant une densité f.
   a) Montrer que la v. a. r. $Y = X^2$ admet une densité et calculer sa densité.
   b) Dans le cas particulier où $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, que vaut la densité de $Y = X^2$?
   Celle-ci définit la *loi du* χ^2 *à* 1 *degré de liberté*, notée χ^2_1.

8) Soit $r > 0$. On note : $\Gamma(r) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,x^{r-1}\,\mathrm{d}x$.
   a) Vérifier que : $0 < \Gamma(r) < +\infty$ et $\Gamma(r+1) = r\,\Gamma(r)$.
   En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
   b) Soit $\lambda > 0$. On pose : $g_{r,\lambda}(x) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,x^{r-1}\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
   Démontrer que $g_{r,\lambda}$ est une densité sur $\mathbb{R}$.
   Sa loi est appelée *loi* Γ *de paramètres* r *et* λ, et notée $\Gamma(r,\lambda)$.
   c) Soient $\lambda > 0$ et $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Démontrer que $\mathcal{E}(\lambda)^{*N} \sim \Gamma(N,\lambda)$.
   Cette loi $\Gamma(N,\lambda)$ est aussi appelée *loi d'Erlang de paramètres* N *et* λ.
   d) En constatant que $\chi^2(1)$ est une loi Γ particulière, en déduire que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

9) Soient $r > 0$ et $s > 0$. On note : $\beta(r,s) = \int_0^1 x^{r-1}(1-x)^{s-1}\,\mathrm{d}x$.

a) Vérifier que : $0 < \beta(r,s) < +\infty$ et relier $\beta(r+1,s-1)$ à $\beta(r,s)$ lorsque $s > 1$.
En déduire la valeur de $\beta(r,s)$ dans le cas particulier où $r,s \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.

b) On considère deux v. a. r. indépendantes X et Y de lois respectives $\Gamma(r,\lambda)$ et $\Gamma(s,\lambda)$.
Démontrer que $S := X+Y$ et $T := \frac{X}{X+Y}$ sont indépendantes, et que $\beta(r,s) = \frac{\Gamma(r)\,\Gamma(s)}{\Gamma(r+s)}$.

c) En déduire une nouvelle démonstration du résultat de l'exercice 8 (c).

d) Soit $(X_1,...,X_n)$ un vecteur aléatoire dont les composantes sont indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$.
Déduire de la question (b) que $X_1^2+\cdots+X_n^2$ suit une loi de densité f_n définie par :
$$f_n(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})\,2^{\frac{n}{2}}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\,x^{\frac{n}{2}-1}\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x) \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}.$$
Cette loi est appelée *loi du* χ^2 *à* n *degrés de liberté*, et notée χ_n^2.

10) On considère deux v. a. r. indépendantes X et Y de lois respectives $\mathcal{N}(0,1)$ et χ_n^2 (cf. ci-dessus).
On pose : $S = X/\sqrt{\frac{Y}{n}}$ et $T = Y$.

a) En considérant le couple (S,T), démontrer que la loi de S admet la densité h_n définie par :
$$h_n(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\,\sqrt{n\pi}}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}.$$
Cette loi est appelée *loi de Student à* n *degrés de liberté*, et notée t_n.

b) Reconnaître la loi t_1.

c) Soit $r \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Montrer que la loi t_n a un moment d'ordre r si et seulement si $r < n$.

d) Calculer l'espérance de la loi t_n pour $n \geq 2$, puis sa variance pour $n \geq 3$.

Somme de v. a. r. indépendantes

11) Le but de cet exercice est de démontrer autrement le résultat de l'exercice 8 de la feuille I.

a) Soient X et Y deux v. a. indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que :
$$P(X+Y=n) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k)\,P(Y=n-k) \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

b) On suppose, par l'absurde, que les variables aléatoires X et Y représentent les résultats du lancé de 2 dés à 6 faces, numérotées de 1 à 6, et que $X+Y$ suit la loi uniforme sur $\{2,3,\ldots,12\}$.
Pour $1 \leq n \leq 6$, on note $p_n = P(X=n)$ et $q_n = P(Y=n)$. Prouver les relations :
$$p_1q_6 + p_6q_1 \leq p_1q_1 = p_6q_6.$$

c) En posant $a = \frac{p_1}{p_6}$, montrer que $a + \frac{1}{a} \leq 1$ puis aboutir à une contradiction.

12) Soient X et Y deux v. a. r. indépendantes de même loi $\mathcal{C}(1)$. On rappelle que la loi de $X+Y$ a une densité $f*g$ obtenue à partir des densités f et g des lois de X et Y par la formule suivante :
$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,g(x-t)\,\mathrm{d}t \ \leq +\infty \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

a) Calculer la densité de $X+Y$.
Indication : on admet qu'on a la décomposition $\frac{1}{T^2+1}\,\frac{1}{(x-T)^2+1} = \frac{\alpha T+\beta}{T^2+1} + \frac{\gamma(x-T)+\delta}{(x-T)^2+1}$ dans $\mathbb{R}[T]$ pour $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ fixé, avec $\alpha = \gamma$ et $\beta = \delta = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{(x-\mathrm{i})^2+1}\right) = \frac{1}{x^2+4}$.

b) En déduire que $X+Y$ a même loi que $2X$.

Densité conditionnelle

13) Soit (X,Y) un couple de v. a. r. qui est discret ou qui possède une densité, avec $Y \geq 0$.
Démontrer que la v. a. r. $\mathrm{E}(Y|X) := \varphi(X)$ où $\varphi(x) = \mathrm{E}(Y|X=x)$ vérifie : $\mathrm{E}(\mathrm{E}(Y|X)) = \mathrm{E}(Y)$.

14) On extrait d'un sac de 100 bonbons un nombre $X \geq 0$ de bonbons choisi uniformément au hasard, et les met dans un second sac. On réitère l'opération dans ce second sac, et note Y le nombre final de bonbons.

a) Déterminer la loi de Y.

b) Calculer l'espérance de Y puis retrouver le résultat fourni par l'exercice 13 pour ce couple (X,Y).

15) Soit (X,Y) un couple de v. a. r. qui possède une densité.
On note p_Y la densité de Y et $p_{X|Y=y}$ la densité conditionnelle de X sachant $Y=y$.
On suppose que : $p_Y(y) = \frac{1}{y^2}\,\mathbb{1}_{[1,+\infty[}(y)$ et $p_{X|Y=y}(x) = y^2\,x\,\mathrm{e}^{-yx}\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$.
Calculer l'espérance conditionnelle $\mathrm{E}(Y|X=x)$ de Y sachant $X=x$ quand $x > 0$.