III. Fonctions caractéristiques

1) Soit X une v. a. r.
   a) Montrer que Φ_X est une fonction continue bornée avec $|\Phi_X| \leq 1$.(⋆)
   b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Exprimer $\Phi_{\lambda X}$ à l'aide de Φ_X.
   c) Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer que $\Phi_X(-t) = \overline{\Phi_X(t)}$.

2) Soit X une v. a. r. On dit que sa loi est *symétrique* si $-X$ a même loi que X (« $-X \overset{\mathscr{L}}{=} X$ »).
   a) Montrer que si X admet une densité f paire, alors sa loi est symétrique.
   b) Montrer que les 3 propriétés suivantes sont équivalentes :
   (i) la loi de X est symétrique ;
   (ii) Φ_X est paire ;
   (iii) Φ_X est à valeurs réelles.

3) Soit $\lambda > 0$. On appelle *loi de Laplace* $\mathcal{L}(\lambda)$ *de paramètre* λ la loi de probabilité de densité f_λ définie par : $f_\lambda(x) = \frac{\lambda}{2}\, \mathrm{e}^{-\lambda|x|}$ pour $x \in \mathbb{R}$.
   a) Soit $X \sim \mathcal{L}(\lambda)$. Quelle est la fonction caractéristique de X ?
   b) Soient Y et Z deux v. a. r. indépendantes telles que $Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$ et $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Calculer la fonction caractéristique de $X := \sqrt{Y}\, Z$ et en déduire sa loi.

4) Soient X et Y deux v. a. r. i. i. d. possédant un moment d'ordre 2 avec $\mathrm{E}(X) = 0$ et $\mathrm{Var}(X) = 1$. On suppose que la loi commune à X et Y est $\mathcal{N}(0,1)$.
   a) Calculer la fonction caractéristique du couple $(X+Y, X-Y)$.
   b) En déduire que $X+Y$ et $X-Y$ sont indépendantes et préciser leurs lois.

5) Soient X et Y deux v. a. r. i. i. d. possédant un moment d'ordre 2 avec $\mathrm{E}(X) = 0$ et $\mathrm{Var}(X) = 1$. On suppose que $X+Y$ et $X-Y$ sont indépendantes.
   a) Montrer que la fonction caractéristique φ commune à X et Y vérifie :
   $\Phi_{(X+Y,X-Y)}(s,t) = \varphi(s)^2\, \varphi(t)\, \varphi(-t)$ pour tous $s, t \in \mathbb{R}$.
   En déduire que : $\varphi(2t) = \varphi(t)^3\, \varphi(-t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
   b) Démontrer que φ ne s'annule pas.
   Indication : raisonner par l'absurde en fixant $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(t_0) = 0$, puis montrant que $\varphi\big(\frac{t_0}{2^n}\big) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ avant de passer à la limite.
   c) Déterminer un développement limité à l'ordre 2 quand $t \to 0$ de $\psi(t) := \frac{\varphi(t)}{\varphi(-t)}$.
   Indication : utiliser les égalités $\mathrm{E}(X) = 0$ et $\mathrm{Var}(X) = 1$.
   d) En remarquant que $\psi(2t) = \psi(t)^2$, déduire de ce qui précède que $\psi(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} \psi\big(\frac{t}{2^n}\big)^{2^n} = 1$.
   Indication : utiliser $\mathrm{Log}_P \colon B(1,1) \to \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Log}_P(z) := \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(z-1)^n}{n}$ si $|z-1| < 1$(⋆⋆).
   e) En déduire que X et Y ont pour loi $\mathcal{N}(0,1)$.

(⋆) Soit $X = (X_1, ..., X_n)$ une v. a. à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. On admet que la loi de X est déterminée par sa *fonction caractéristique* $\Phi_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ définie par : $\Phi_X(t) = \mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t_1X_1+\cdots+t_nX_n)}\right)$ pour $t = (t_1, ..., t_n) \in \mathbb{R}^n$.

(⋆⋆) Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z-1| < 1$, on a : $\boxed{\exp(\mathrm{Log}_P(z)) = z}$. Pour le démontrer, on introduit $u = z - 1$ et pose $f(t) = \mathrm{Log}_P(1+tu) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(tu)^n}{n}$ pour $t \in [0,1]$. L'application $f \colon [0,1] \to \mathbb{C}$ est dérivable avec $f'(t) = \frac{u}{1+tu}$, donc $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big((1+tu)\exp(-f(t))\big) = 0$, puis $z \exp(-\mathrm{Log}_P(z)) = (1+1u)\exp(-f(1)) = (1+0u)\exp(-f(0)) = 1$.

6) On rappelle qu'une v. a. r. X suit la loi de Cauchy $\mathcal{C}(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$ si et seulement si X a pour densité $p_X(x) = \frac{\lambda}{\pi(\lambda^2+x^2)}$, et que ceci équivaut à $\Phi_X(t) = \mathrm{e}^{-\lambda|t|}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.$^{(\star\star\star)}$

a) On suppose que $X \sim \mathcal{C}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{C}(\mu)$ avec X et Y indépendantes.
Démontrer que $X + Y \sim \mathcal{C}(\lambda + \mu)$.

b) On suppose que $X \sim \mathcal{C}(\lambda)$ et $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Démontrer que $\alpha X \sim \mathcal{C}(|\alpha|\lambda)$. Pouvait-on prévoir que $-X \sim \mathcal{C}(\lambda)$?

c) On suppose que X et Y sont indépendantes de même loi $\mathcal{C}(\lambda)$.
Démontrer que $\alpha X + \beta Y \overset{\mathscr{L}}{=} (\alpha + \beta)X$ pour tous $\alpha, \beta > 0$.

7) On suppose que X et Y sont indépendantes de même loi *symétrique* et que $X + Y \overset{\mathscr{L}}{=} 2X$.
On veut montrer que $X = 0$ ou que $X \sim \mathcal{C}(\lambda)$ pour un certain $\lambda > 0$.

a) Écrire une équation fonctionnelle pour la fonction caractéristique φ commune à X et Y.
En déduire que : $\varphi(t) = \varphi(\frac{t}{2^n})^{2^n}$ pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, puis que φ est à valeurs > 0.

b) Déterminer une équation fonctionnelle pour $\psi \colon]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $\psi(t) := \ln(\varphi(t))$.

c) En déduire que $\varphi(t) = \mathrm{e}^{\ln(\varphi(1))|t|}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, puis conclure. $^{(\star\star\star\star)}$

8) On considère une v. a. r. X admettant une densité p_X.

a) Soit Y une v. a. r. indépendante de X admettant une densité p_Y.
Démontrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a : $\mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tY}\Phi_X(Y)\right) = \mathrm{E}\left(\Phi_Y(X - t)\right)$.

b) En choisissant $Y \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, prouver l'égalité :
$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{e}^{-ity}\,\Phi_X(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}\,p_X(t + \tfrac{z}{\sigma})\,\mathrm{d}z \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

c) On suppose que p_X est continue bornée avec $\int_{\mathbb{R}} |\Phi_X(t)|\,\mathrm{d}t < +\infty$.
Prouver le cas particulier suivant de la formule d'inversion de Levy :
$p_X(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\,\Phi_X(t)\,\mathrm{d}t$ pour $x \in \mathbb{R}$ « formule d'inversion de Fourier pour p_X ».
Indication : on admettra que pour tout intervalle I et toute suite $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ d'applications mesurables de I dans $\mathbb{C}$ qui est simplement convergente avec $\displaystyle\int_I \sup_{n\geq 0} |\varphi_n(t)|\,\mathrm{d}t < +\infty$, on a
$$\int_I \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_I \lim_{n\to+\infty} \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t$$ « théorème de convergence dominée ».

$(\star\star\star)$ La fonction caractéristique de la loi de Cauchy s'obtient avec la formule d'inversion de Levy et la question 3 a).
$(\star\star\star\star)$ On peut prouver en utilisant le même schéma que seule la loi gaussienne satisfait $X + Y \overset{\mathscr{L}}{=} \sqrt{2}X$.