Fonctions caractéristiques : à retenir

On se donne une probabilité P sur un ensemble Ω (muni d'évènements) et $n \in \mathbb{N}$.

Définition-Proposition

(a) Soit X une v. a. r. sur Ω.
La loi de X est déterminée par sa *fonction caractéristique* $\Phi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par :
$$\Phi_X(t) = \mathrm{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX}) \quad \text{pour} \quad t \in \mathbb{R}.$$
(b) Soit $X = (X_1, ..., X_n)$ une v. a. sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.
La loi de X est déterminée par sa *fonction caractéristique* $\Phi_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ définie par :
$$\Phi_X(t) = \mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t_1X_1+\cdots+t_nX_n)}\right) \quad \text{pour} \quad t = (t_1, ..., t_n) \in \mathbb{R}^n.$$
De plus les v. a. r. X_1, ..., X_n sont indépendantes si et seulement si
$$\Phi_{(X_1,...,X_n)}(t_1, ..., t_n) = \Phi_{X_1}(t_1) \cdots \Phi_{X_n}(t_n) \quad \text{pour tout} \quad (t_1, ..., t_n) \in \mathbb{R}^n.^{(\star)}$$

Exemples

Lorsque $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ avec $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$, on a :
$$\Phi_X(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}mt}\,\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2}{2}t^2} \quad \text{pour tout} \quad t \in \mathbb{R}.$$
D'autres cas ($t \in \mathbb{R}$) :
– Si $X \sim \mathcal{B}(p)$ avec $p \in [0, 1]$, alors $\Phi_X(t) = 1 - p + p\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$.
- Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $p \in [0, 1]$, alors $\Phi_X(t) = (1 - p + p\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})^n$.
– Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$, alors $\Phi_X(t) = \exp(\lambda(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - 1))$.
– Si $X \sim \mathcal{G}(p)$ (resp. $\mathcal{G}(p)_{\mathbb{N}\setminus\{0\}}$) avec $p \in]0, 1[$, alors $\Phi_X(t) = \frac{p}{1-(1-p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}$ (resp. $\frac{p\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{1-(1-p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}$).
– Si $X \sim \mathcal{U}_{[-a,a]}$ avec $a > 0$, alors $\Phi_X(t) = \frac{\sin(at)}{at}$.
– Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$, alors $\Phi_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda-\mathrm{i}t}$.
– Si $X \sim \Gamma(r, \lambda)$ avec $r > 0$ et $\lambda > 0$, alors $\Phi_X(t) = (\frac{\lambda}{\lambda-\mathrm{i}t})^r.^{(\star\star)}$

Proposition

(a) Soit X une v. a. r. sur Ω.
La fonction Φ_X est continue et bornée avec $\Phi_X(0) = 1$ et $|\Phi_X| \leq 1$.
On a : $\left|\begin{array}{l} \text{si } \mathrm{E}(|X|) < +\infty, \text{ alors } \Phi_X \text{ est } \mathrm{C}^1 \text{ et } \Phi'_X(0) = \mathrm{i}\,\mathrm{E}(X)\,; \\ \text{si } \mathrm{E}(X^2) < +\infty, \text{ alors } \Phi_X \text{ est } \mathrm{C}^2 \text{ et } \Phi''_X(0) = -\,\mathrm{E}(X^2) \end{array}\right.$
et plus généralement, si $n \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{E}(|X|^n) < +\infty$, alors Φ_X est C^n et $\Phi_X^{(n)}(t) = \mathrm{E}(\mathrm{i}^n X^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX})$.
(Noter que la connaissance du développement limité de Φ_X en 0 permet ainsi de calculer $\mathrm{E}(X^n)$.)

(b) Soient X et Y deux v. a. sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.
Quand X et Y sont indépendantes, on a : $\Phi_{X+Y}(t) = \Phi_X(t)\,\Phi_Y(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^n$.

Proposition (« formule d'inversion de Levy »)

Soit X une v. a. r. sur Ω.
Si $\int_{\mathbb{R}} |\Phi_X(t)|\,\mathrm{d}t < +\infty$, alors X admet pour densité la fonction p_X définie par :
$$p_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\,\Phi_X(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{pour } x \in \mathbb{R}.$$

($\star$) Les fonctions Φ_{X_1}, ..., Φ_{X_n} se déduisent de Φ_X par : $\Phi_{X_k}(t_k) = \Phi_X(0, ..., 0, \underbrace{t_k}_{\text{au } k^{\text{e}} \text{ emplacement}}, 0, ..., 0)$.

($\star\star$) Soit $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$. On pose : $\mathrm{Log}_P(z) := \ln r + \mathrm{i}\theta$ où z se décompose en $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in]-\pi, \pi[$.
Cela permet de définir ici $z^\alpha := \exp(\alpha\,\mathrm{Log}_P(z))$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, en particulier pour $\alpha = r$.