IV. Convergence de variables aléatoires

Convergence en moyenne quadratique et convergence en probabilité

1) On dit qu'une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de v. a. r. *converge en moyenne quadratique* vers une v. a. r. X, et note $X_n \underset{n\to+\infty}{\overset{L^2}{\longrightarrow}} X$, si : $\mathrm{E}\big((X_n - X)^2\big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

   a) Montrer que : $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$.

   b) En déduire que si $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en moyenne quadratique vers X et $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge en moyenne quadratique vers Y, alors $(X_n+Y_n)_{n\geq 1}$ converge en moyenne quadratique vers $X+Y$.

2) Soient X_1, ..., X_n des v. a. r. i. i. d., telles que $X_1 \sim \mathcal{B}(p)$ avec $p \in \,]0,1[$ inconnu.

   a) On introduit $S_n := X_1 + ... + X_n$ (« nombre de pile »). Calculer $\mathrm{E}(S_n)$ et $\mathrm{Var}(S_n)$.

   b) On pose $\overline{X_n} := \frac{S_n}{n}$. Calculer $\mathrm{E}(\overline{X_n})$ et $\mathrm{Var}(\overline{X_n})$.

   c) Soit $\varepsilon > 0$. Trouver un majorant de $\sup\limits_{0<p<1} P\big(\big|\overline{X_n} - p\big| \geq \varepsilon\big)$ de limite 0 quand $n \to +\infty$.
   Indication : utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

   d) On lance 100 fois une pièce et l'on obtient 40 piles et 60 faces.
   Donner un intervalle de confiance de niveau 95% pour p.
   Même question avec 10 000 lancés lorsqu'on obtient 4 000 piles et 6 000 faces.

Convergence en loi

3) Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de v. a. r. i. i. d. telle que $U_1 \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$.
   On pose : $Z_n = n \min(U_1, ..., U_n)$ pour tout $n \geq 1$.

   a) Calculer la fonction de répartition de Z_n pour tout $n \geq 1$.

   b) Soit $Y \sim \mathcal{E}(1)$. Montrer que : $Z_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathscr{L}}{\longrightarrow}} Y$.

4) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. On pose : $E_n = \{a + k\frac{b-a}{n} \ ; \ 0 \leq k \leq n-1\}$ pour $n \geq 1$.
   Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v. a. r. telle que $X_n \sim \mathcal{U}_{E_n}$.

   a) Étant donné $h \in \mathscr{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, montrer que la suite $\big(\mathrm{E}(h(X_n))\big)_{n\geq 1}$ converge et calculer sa limite.

   b) En déduire que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi et déterminer sa limite en loi.

5) On considère une suite $(p_n)_{n\geq 1}$ de points de $]0,1[$ telle que $np_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda > 0$.
   Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v. a. r. telle que $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$.
   Démontrer que : $X_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathscr{L}}{\longrightarrow}} \mathcal{P}(\lambda)$.
   Indication : prouver que $P(X_n = k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-\lambda}\, \frac{\lambda^k}{k!}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

6) On considère une suite $(p_n)_{n\geq 1}$ de points de $]0,1[$ telle que $p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

   a) Soit $Y \sim \mathcal{G}(p)$ (loi géométrique à valeurs dans $\mathbb{N}$). Que vaut $\Phi_Y(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$?

   b) Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de v. a. r. telle que $Y_n \sim \mathcal{G}(p_n)$.
   Démontrer que la suite $(p_n Y_n)_{n\geq 1}$ converge en loi et identifier sa limite en loi.

7) On rappelle que la loi t_n de Student à n degrés de liberté admet la densité h_n définie par :
$$h_n(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{n\pi}}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}.$$
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v. a. r. telle que $X_n \sim t_n$.
Démontrer que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi et déterminer la loi limite.
Indication : utiliser le lemme de Scheffé en admettant que $\frac{\Gamma(t+\frac{1}{2})}{\Gamma(t)} \underset{t\to+\infty}{\sim} \sqrt{t}$.

8) Le but de cet exercice est de montrer que la réciproque du lemme de Scheffé est fausse.
a) Pour tout $n \geq 1$, on définit $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par : $f_n(x) = (1-\cos(2\pi n x))\,\mathbb{1}_{]0,1[}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
Montrer que f_n est une densité de probabilité et calculer la fonction de répartition F_n associée.
b) Pour tout $n \geq 1$, on considère une v. a. r. X_n de densité f_n.
Démontrer que : $X_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathscr{L}}{\longrightarrow}} \mathcal{U}_{[0,1]}$.
c) Démontrer que la suite $(f_n(x))_{n\geq 1}$ diverge pour tout $x \in]0,1[$.
Indication : poser $\theta = 2\pi x$ puis transformer $\cos((n+1)\theta)+\cos((n-1)\theta)$ et $\cos(2n\theta)$.

Théorème central limite (TCL)

9) Un restaurateur peut servir 75 repas, uniquement sur réservation. La pratique montre que 20% des clients ayant réservés ne viennent pas.
Combien le restaurateur doit-il accepter de réservations indépendantes pour avoir une probabilité supérieure ou égale à 0,9 (resp. 0,99) de pouvoir servir tous les clients qui se présenteront ?
Indication : introduire des v. a. r. X_1, ..., X_n indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$ puis utiliser une approximation de $\mathcal{B}(n,p)$ par une loi normale quand $np \geq 10$ et $n(1-p) \geq 10$.

10) Soient X et Y deux v. a. r. indépendantes et de même loi μ, qui admet un moment d'ordre 2.
On suppose que : $\frac{X+Y}{\sqrt{2}} \sim \mu$.
a) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v. a. r. i. i. d. de loi μ.
Démontrer que : $\frac{1}{\sqrt{2}^n}(X_1 + \ldots + X_{2^n}) \sim \mu$.
b) En appliquant le TCL, en déduire que $\mu = \mathcal{B}(0)$ ou $\mu = \mathcal{N}(0,\sigma^2)$ pour un certain $\sigma > 0$.

11) Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v. a. r. i. i. d. avec $X_1 \sim \mathcal{P}(1)$ et $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$.
a) Déterminer la loi de $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, son espérance et sa variance (utiliser l'exercice I 7).
b) On pose : $S'_n := \frac{S_n - \mathrm{E}(S_n)}{\sigma(S_n)}$ et ${S'_n}^+ = S'_n\,\mathbb{1}_{\{S'n>0\}}$ pour $n \geq 1$, ainsi que $Y^+ = Y\,\mathbb{1}_{\{Y>0\}}$.
Montrer que : $\mathrm{E}({S'_n}^+) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{E}(Y^+)$.
Indication : utiliser l'égalité $\mathrm{E}(Z) = \int_0^{+\infty} P(Z>t)\,\mathrm{d}t$ valable pour toute v. a. r. positive $Z^{(\star)}$ et le théorème de convergence dominée grâce à l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour S'_n.
c) En déduire la formule de Stirling : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n\,\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}$.
Indication : calculer $\mathrm{E}({S'_n}^+)$ en utilisant l'égalité $k\,P(S_n = k) = n\,P(S_n = k-1)$ pour $k \geq 1$.

12) On effectue une suite de tirages avec remise dans une urne contenant des boules numérotées de 1 à n. Soit X le nombre de tirages nécessaires pour ramener pour la 1[ère] fois une boule déjà tirée.
a) Montrer que X est à valeurs dans $\{2, \ldots, n+1\}$.
b) En appliquant le TLC à une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de v. a. r. i. i. d. avec $X_1 \sim \mathcal{P}(1)$, prouver que :
$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2} \quad \text{« formule de Bernstein ».}$$
c) En déduire que : $\mathrm{E}(X) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi n}{2}}$.
Indication : utiliser l'égalité $\mathrm{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X>k)^{(\star)}$ et la formule de Stirling.

$(\star)$ Soit Z une v. a. à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, discrète ou à densité. D'après le théorème de Fubini, on a :
$$\mathrm{E}(Z) = \int_0^{+\infty} z\,\mathrm{d}P_Z(z) = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}\mathbb{1}_{\{t<z\}}(t,z)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}P_Z(z) = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}\mathbb{1}_{\{t<z\}}(t,z)\,\mathrm{d}P_Z(z)\right)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} P(Z>t)\,\mathrm{d}t.$$

Contre-exemples

13) Soient U une variable aléatoire uniforme dans $[0,1]$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour $n \geq 1$.

On pose $I_n = [S_n - \lfloor S_n \rfloor, S_{n+1} - \lfloor S_n \rfloor]$ pour $n \geq 1$, puis $X_n = 1$ si $U \in I_n$ et $X_n = 0$ sinon.

a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $P(X_n = 0) \geq 1 - \frac{1}{n}$.
En déduire que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers 0.

b) Montrer que $(X_n)_{n\geq 1}$ n'est pas convergente presque surement.
Indication : remarquer que $S_n \to +\infty$.

14) À chaque $n \geq 1$ on associe une variable aléatoire X_n telle que :

$$P(X_n = 0) = 1 - \tfrac{1}{n} \text{ et } P(X_n = n) = P(X_n = -n) = \tfrac{1}{2n}.$$

a) Calculer $\mathrm{E}(X_n)$ et $\mathrm{Var}\, X_n$.

b) En déduire que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité mais pas en moyenne quadratique.

15) Construire une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoire toutes de même loi mais telle que la suite X_n n'ai pas de limite en probabilités.

Indication : on pourra choisir la loi des X_n aussi simple que possible pour se simplifier la vie.

16) Construire une suite de variable aléatoires réelles X_n telle que pour toute fonction φ continue à support compact, on ait : $\mathrm{E}(\phi(X_n)) \to 0$.