Théorèmes limites : à retenir

On se donne une probabilité P sur un ensemble Ω (muni d'évènements).

Proposition

Soit X une v. a. r. sur Ω vérifiant $\mathrm{E}(X^2) < +\infty$.

On a : $P(|X - \mathrm{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\,\mathrm{Var}(X)$ pour tout $\varepsilon > 0$ « inégalité de Bienaymé-Tchebychev ».

[Cela découle de l'« inégalité de Markov » : $P(Z \geq a) \leq \underbrace{\frac{\mathrm{E}(Z)}{a}}_{\leq +\infty}$ pour Z v. a. r. positive et $a > 0$.]

Définition-Proposition

Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v. a. r. sur Ω, et, X et Y deux v. a. r. sur Ω.

(a) On dit que *la suite* $(X_n)_{n\geq 1}$ *converge en probabilité vers* X, et note « $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{P} X$ », si :

$$P\big(|X_n - X| \geq \varepsilon\big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{pour tout } \varepsilon > 0.$$

De plus, si $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{P} X$ et $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{P} Y$ alors $P(X = Y) = 1$ (unicité à l'égalité presque sûre près).

(b) On dit que $(X_n)_{n\geq 1}$ *converge en loi vers* X, et note « $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} X$ », si elle vérifie l'une des trois propriétés équivalentes :

(i) $\mathrm{E}(h(X_n)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{E}(h(X))$ pour tout $h \in \mathscr{C}_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$;

(ii) $F_{X_n}(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} F_X(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ en lequel F_X est continue ;

(iii) $\Phi_{X_n}(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \Phi_X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

D'après (i) : si $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} X$ alors on a $f(X_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} f(X)$ pour tout $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

(c) Si $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{P} X$, alors $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} X$.

Proposition

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v. a. r. indépendantes de même loi (« i. i. d. » pour « indépendantes et identiquement distribuées ») sur Ω, telle que $\underbrace{\mathrm{E}(X_1^2) < +\infty}_{\text{en fait la condition « } \mathrm{E}(|X_1|) < +\infty \text{ » suffit}}$.

On a : $\overline{X_n} := \frac{X_1+\ldots+X_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{P} \mathrm{E}(X_1)$ « loi faible des grands nombres ».

[Provient de la « convergence en moyenne quadratique » : $\underbrace{\mathrm{E}\left((\overline{X_n} - \mathrm{E}(X_1))^2\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}_{\text{noté « } \overline{X_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{L^2} \mathrm{E}(X_1) \text{ »}}$.]

Compléments

Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v. a. r. sur Ω et X une v. a. r. sur Ω.

(a) On dit que *la suite* $(X_n)_{n\geq 1}$ *converge presque sûrement vers* X, et note « $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p. s.}} X$ », si :

$$P\big(\{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} X(\omega)\}\big) = 0.$$

(b) Si $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p. s.}} X$, alors $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{P} X$.

hors programme

(c) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v. a. r. i. i. d. sur Ω telle que $\mathrm{E}(|X_1|) < +\infty$.

On a : $\overline{X_n} = \frac{X_1+\ldots+X_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p. s.}} \mathrm{E}(X_1)$ « loi forte des grands nombres ».

(d) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v. a. r. i. i. d. sur Ω telle que $\mathrm{E}(X_1^2) < +\infty$.

On a : $\widehat{\sigma_n}^2 := \frac{(X_1-\overline{X_n})^2+\ldots+(X_n-\overline{X_n})^2}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p. s.}} \mathrm{Var}(X_1)$.

Proposition (lemme de Scheffé)

On considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de v. a. r. sur Ω et une v. a. r. X sur Ω.

(a) On suppose que les X_n $(n \geq 1)$ et X sont à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

On a : $X_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathscr{L}}{\longrightarrow}} X \iff \forall k \in \mathbb{Z} \quad P(X_n = k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P(X = k)$.

(b) On suppose que les X_n $(n \geq 1)$ et X ont des densités $p_n \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ et $p \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$.

Si $p_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} p_X(x)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, alors $X_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathscr{L}}{\longrightarrow}} X$.

Théorème

On note : $\Pi(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\, \mathrm{d}x$.

(a) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v. a. r. i. i. d. sur Ω telle que $\mathrm{E}(X_1^2) < +\infty$ et $\sigma(X_1) \neq 0$.

On pose : $S_n = X_1 + ... + X_n$ quand $n \geq 1$. On a :

$$\underbrace{\tfrac{S_n - \mathrm{E}(S_n)}{\sigma(S_n)}}_{\text{somme réduite}} \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathscr{L}}{\longrightarrow}} X \sim \mathcal{N}(0,1) \qquad \text{« théorème central limite ».}$$

Cela signifie que : $P\Big(a < \underbrace{\tfrac{S_n - \mathrm{E}(S_n)}{\sigma(S_n)}}_{\frac{\overline{X_n} - \mathrm{E}(X_1)}{\sigma(X_1)/\sqrt{n}}} < b\Big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \underbrace{\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\, \mathrm{d}x}_{\Pi(b)\,-\,\Pi(a)}$ quand $-\infty \leq a < b \leq +\infty^{(\star)}$.

(c) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v. a. r. i. i. d. avec X_1 de loi de Bernoulli de paramètre $p \in \,]0,1[$.

On pose : $S_n = X_1 + ... + X_n$ quand $n \geq 1$. On a d'après le théorème central limite :

$P\Big(a < \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < b\Big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \Pi(b) - \Pi(a)$ quand $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ « théorème de Moivre-Laplace ».

Remarque

Le théorème central limite est valable avec « $\leq$ » au lieu de « $<$ » car $S'_n := \frac{S_n - \mathrm{E}(S_n)}{\sigma(S_n)}$ vérifie :

$$\underbrace{P(a < S'_n < b)}_{\geq\, \Pi(b) - \Pi(a) - \varepsilon \text{ si } n \geq N} \leq P(a \leq S'_n \leq b) \leq P(a - \tfrac{1}{k} < S'_n < b + \tfrac{1}{k}) \underbrace{\leq}_{n \geq N_k} \underbrace{\Pi(b + \tfrac{1}{k}) - \Pi(a - \tfrac{1}{k}) + \tfrac{\varepsilon}{2}}_{\leq\, \Pi(b) - \Pi(a) + \varepsilon \text{ si } k = K \text{ et } n \geq N_k}.$$

Une construction admise (suite de v. a. r. indépendantes avec des lois imposées)

Soient U_n des v. a. r. sur des ensembles Ω_n munis chacun (d'évènements et) d'une probabilité P_n sur Ω_n, où $n \geq 1$. Il existe une probabilité $\widetilde{P}$ sur l'ensemble $\Omega_{\mathbb{N}} = \prod_{n\geq 1} \Omega_n$ (muni de certains évènements) et une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de v. a. r. indépendantes sur $\Omega_{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \geq 1$ la loi de X_n pour $\widetilde{P}$ est égale à la loi de U_n pour P_n.

Exemple : la probabilité $\widetilde{P}$ du jeu de pile ou face infini s'obtient avec $P_n = \mathcal{B}(p)$ et $U_n = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

$(\star)$ Pour « n grand », on approxime en pratique $P\Big(\Big|\frac{\overline{X_n} - \mathrm{E}(X_1)}{\sigma(X_1)/\sqrt{n}}\Big| < a\Big)$ par sa limite $2\,\Pi(a) - 1$ quand $n \to +\infty$, et cet abus fournit un intervalle de la forme $\big]\overline{X_n} - \varepsilon_n, \overline{X_n} + \varepsilon_n\big[$ dans lequel $\mathrm{E}(X_1)$ se trouve avec une probabilité $\geq 1 - \alpha$ où α est déduit de la table des valeurs prises par Π.