Université Paris Diderot | Année 2016/2017
UFR de Mathématiques | Probabilités III

V. Vecteurs gaussiens

1) Soient X et Y deux v. a. r. indépendantes avec $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $Y \sim \mathcal{U}_{\{-1,1\}}$.
On pose $Z = XY$.

   a) Calculer Φ_Z et en déduire la loi de Z.

   b) Les v. a. r. X et Z sont-elles indépendantes ?
   Indication : remarquer que $P(|X| > 1) > 0$ et $P(|Z| \leq 1) > 0$.

   c) Le vecteur aléatoire (X, Z) est-il gaussien ?
   Indication : calculer, au choix, $\mathrm{Cov}(X, Z)$ ou $P(X - Z = 0)$.

2) Soit $X = (X_1, X_2)$ avec X_1 et X_2 deux v. a. r. i. i. d. de loi $\mathcal{N}(0,1)$.
On définit $Y = (Y_1, Y_2)$ par : $Y_1 = X_1 + 3X_2 - 1$ et $Y_2 = X_1 - X_2 + 2$.

   a) Que vaut la loi de Y ?

   b) La v. a. Y admet-elle une densité ? Si oui, laquelle ?

3) Soient X_1, ..., X_n des v. a. r. i. i. d. de loi $\mathcal{N}(0,1)$.
On fixe $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $b = (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$, et pose : $Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ et $Z = \sum_{i=1}^{n} b_i X_i$.

   a) Le vecteur (Y, Z) est-il gaussien ?

   b) Déterminer la loi de (Y, Z).

   c) Donner une condition nécessaire et suffisante d'indépendance de Y et Z portant sur a et b.

4) Soient X_1, ..., X_n des v. a. r. i. i. d. de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, où $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$ $(n \geq 2)$.
On pose : $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ « moyenne empirique »
et $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$ « variance empirique corrigée ».

   a) Quelle est la loi de $\overline{X}$?

   b) Calculer $\mathrm{E}(S^2)$.
   Indication : on pourra commencer par vérifier que $(n-1)S^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2$.

   c) Montrer que le vecteur $(\overline{X}, X_1 - \overline{X}, ..., X_n - \overline{X})$ est gaussien.

   d) Montrer que $\overline{X}$ et $(X_1 - \overline{X}, ..., X_n - \overline{X})$ sont indépendantes.

   e) En déduire que $\overline{X}$ et S^2 sont indépendantes$^{(*)}$.

$(*)$ On a introduit dans la feuille II la loi χ^2_n du χ^2 à n degrés de liberté et la loi t_n de Student à n degrés de liberté. On constate que $\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $(n-1)S^2 = Y_2^2 + ... + Y_n^2$ où $Y = A(X - (m, ..., m))$ et A est une matrice orthogonale dont la première ligne est $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, ..., \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ (utiliser l'indication de la question (b) avec $X_i - m$ à la place de X_i). Donc $(n-1)\,\frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$. De plus : $\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-m}{S} = \left(\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-m}{\sigma}\right) \Big/ \sqrt{\frac{S^2}{\sigma^2}}$. On déduit de la question (e) que : $\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-m}{S} \sim t_{n-1}$.