Vecteurs gaussiens : à retenir

On se donne une probabilité P sur un ensemble Ω (muni d'évènements) et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

On note : $\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$ pour tous $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Définition

Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}} \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{R})$ une matrice carrée d'ordre n et Z une v. a. r. sur Ω.

(a) On dit que A est *symétrique* si : $a_{j,i} = a_{i,j}$ pour tous $i, j \in \{1, ..., n\}$.

Dans ce cas, on dit que A est *positive* si : $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

(b) On dit que Z est gaussienne s'il existe $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \geq 0$ tels que $\begin{cases} \sigma = 0 \text{ et } P(Z = m) = 1 \\ \text{ou} \\ \sigma > 0 \text{ et } Z \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2) \end{cases}$.

Définition-Proposition

Soient $X = (X_1, ..., X_n)$ et $Y = (Y_1, ..., Y_n)$ deux v. a. sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

(a) Pour tous $\mu \in \mathbb{R}^n$ et $\Gamma \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{R})$ symétrique positive, il existe une unique loi de probabilité $\mathcal{N}_n(\mu, \Gamma)$ sur $\mathbb{R}^n$ dont la fonction caractéristique Φ vérifie : $\boxed{\Phi(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle \mu, t\rangle}\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\langle \Gamma t, t\rangle}}$ pour $t \in \mathbb{R}^n$.

Ainsi : | si $X \sim \mathcal{N}_n(\mu, \Gamma)$ et $Y \sim \mathcal{N}_n(\nu, \Delta)$ sont indépendantes, alors $X+Y \sim \mathcal{N}_n(\mu+\nu, \Gamma+\Delta)$;
| si $X \sim \mathcal{N}_n(\mu, \Gamma)$ et $A \in \mathfrak{M}_{k,n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathbb{R}^k$, alors $AX + B \sim \mathcal{N}_k(A\mu + B, A\,\Gamma\,{}^t\!A)$.

(b) On dit que la v. a. X est *gaussienne* s'il existe un vecteur $\mu \in \mathbb{R}^n$ et une matrice $\Gamma \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{R})$ symétrique positive tels que $X \sim \mathcal{N}_n(\mu, \Gamma)$.

Dans ce cas X_1, ..., X_n ont des moments d'ordre 2 avec :

$$\boxed{\mu = (\mathrm{E}(X_1), ..., \mathrm{E}(X_n)) \text{ et } \Gamma = (\mathrm{Cov}(X_i, X_j))_{1\le i,j\le n}}.$$

(c) La v. a. X est gaussienne si et seulement si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i$ est gaussienne pour tous $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$.

Définition-Proposition

Soit X une v. a. à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ gaussienne d'espérance μ et de matrice de covariance Γ.

(a) On a : $P\big(X \in \Gamma(\mathbb{R}^n) + \mu\big) = 1$.

En particulier, X n'a pas de densité lorsque $\det(\Gamma) = 0$.

(b) On suppose que $\det(\Gamma) \neq 0$.

La loi de X a pour densité la fonction p_X définie par :

$$\boxed{p_X(x) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det(\Gamma)}}\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\langle \Gamma^{-1}(x-\mu)\,,\, x-\mu\,\rangle}} \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}^n.$$

Proposition

Soit $X = (X_1, ..., X_r, X_{r+1}, ..., X_n)$ une v. a. à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, avec $1 \leq r < n$.

(a) Si X est gaussienne, alors $(X_1, ..., X_r)$ et $(X_{r+1}, ..., X_n)$ sont gaussiennes.

La réciproque est fausse.

(b) Si $(X_1, ..., X_r) \sim \mathcal{N}_r(\mu', \Gamma')$ et $(X_{r+1}, ..., X_n) \sim \mathcal{N}_{n-r}(\mu'', \Gamma'')$ sont indépendantes, alors $X \sim \mathcal{N}_n(\mu, \Gamma)$ avec $\mu = (\mu', \mu'')$ et $\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma' & 0 \\ 0 & \Gamma'' \end{pmatrix}$.

(c) Si X est gaussienne avec $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 0$ quand $1 \leq i \leq r$ et $r + 1 \leq j \leq n$, alors $(X_1, ..., X_r)$ et $(X_{r+1}, ..., X_n)$ sont indépendantes.