Suites et séries de fonctions : rappels (J-Y D)

Définition-Proposition

Soit A un ensemble. On pose : $\|f\|_\infty := \sup_{x\in A} |f(x)| \leq +\infty$ pour toute application $f\colon A \to \mathbb{C}$.

(a) On dit qu'une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ d'applications de A dans $\mathbb{C}$ *converge simplement* vers une application f de A dans $\mathbb{C}$ si : $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$ pour tout $x \in A$.

(b) On dit qu'une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ d'applications de A dans $\mathbb{C}$ *converge uniformément* vers une application f de A dans $\mathbb{C}$ si : $\|f_n - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Dans ce cas $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers f.

Définition

Soit A un ensemble.

(a) On dit qu'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de nombres complexes est *une suite de Cauchy* si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall p, q \in \mathbb{N} \quad \big(\, p \geq N \text{ et } q \geq N \implies |u_p - u_q| < \varepsilon \,\big).$$

$\leftarrow$ [s'écrit : $|u_p - u_q| \underset{\min(p,q)\to+\infty}{\longrightarrow} 0$]

(b) On dit qu'une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ d'applications de A dans $\mathbb{C}$ vérifie *le critère de Cauchy uniforme* si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall p, q \in \mathbb{N} \quad \big(\, p \geq N \text{ et } q \geq N \implies \|f_p - f_q\|_\infty < \varepsilon \,\big).$$

Proposition

Soit A un ensemble.

(a) Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de nombres complexes converge si et seulement si elle est de Cauchy.

(b) Une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ d'applications de A dans $\mathbb{C}$ converge uniformément si et seulement si elle vérifie le critère de Cauchy uniforme.

Théorème (« convergence uniforme + continuité » et « convergence uniforme + dérivabilité »)

Soient $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle infini, $f_n\colon I \to \mathbb{C}$ pour $n \in \mathbb{N}$, et $a \in I$.

(a) On suppose que
- f_n est continue en a pour tout $n \geq 0$;
- $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers une application f.

Alors f est continue en a.

(b) On suppose que
- f_n est dérivable pour tout $n \geq 0$;
- il existe $x_0 \in I$ pour lequel la suite $\big(f_n(x_0)\big)_{n\geq 0}$ converge ;
- la suite $(f'_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément.

Alors $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur toute partie bornée de I vers une fonction dérivable f telle que : $f'(x) = \lim_{n\to+\infty} f'_n(x)$ pour $x \in I$.

Proposition (« convergence uniforme + intégration sur un segment »)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ pour $n \in \mathbb{N}$

On suppose que
- f_n est continue pour tout $n \geq 0$;
- $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers une application f.

Alors f est continue (déjà vu) et $\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

Définition

Soit A un ensemble.

(a) On appelle *série de nombres complexes* une suite $(\sum u_n)_{n\geq 0}$ de la forme $\left(u_n, \sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\geq 0}$ où $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite de nombres complexes.

Lorsque la série $(\sum u_n)_{n\geq 0}$ converge ce qui signifie que la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\geq 0}$ est convergente, ou lorsque $u_n \in \mathbb{R}_+$ pour tout $n \geq 0$, on note : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$.

(b) Soit $(\sum u_n)_{n\geq 0}$ une série de nombres complexes.

On dit que $(\sum u_n)_{n\geq 0}$ est *absolument convergente* si : $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| < +\infty$.

(c) On appelle *série d'applications de A dans* $\mathbb{C}$ une suite $(\sum f_n)_{n\geq 0}$ de la forme $\left(f_n, \sum_{k=0}^{n} f_k\right)_{n\geq 0}$ où $(f_n)_{n\geq 0}$ est une suite d'applications de A dans $\mathbb{C}$.

Lorsque la série $(\sum f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement, c'est-à-dire la suite d'applications $\left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)_{n\geq 0}$ est simplement convergente, on note : $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k$.

(d) Soit $(\sum f_n)_{n\geq 0}$ une série d'applications de A dans $\mathbb{C}$.

On dit que $(\sum f_n)_{n\geq 0}$ est *normalement convergente* si : $\sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_\infty < +\infty$.

Proposition

Soit A un ensemble.

(a) Si une série $(\sum u_n)_{n\geq 0}$ de nombres complexes converge, elle vérifie :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad \left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| \leq +\infty.$$

(b) Toute série absolument convergente $(\sum u_n)_{n\geq 0}$ de nombres complexes est convergente.

(c) Si une série $(\sum f_n)_{n\geq 0}$ d'applications de A dans $\mathbb{C}$ converge uniformément, elle vérifie :

$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{uniformément}} 0 \quad \text{et} \quad \left\|\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right\|_\infty \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_\infty \leq +\infty.$$

(d) Toute série normalement convergente $(\sum f_n)_{n\geq 0}$ d'applications de A dans $\mathbb{C}$ est uniformément convergente.

En appliquant les résultats de la page précédente aux sommes partielles des séries de fonctions normalement convergentes, on obtient des résultats de « convergence normale + continuité », de « convergence normale + dérivabilité » et de « convergence normale + intégration sur un segment ».

On verra dans le cours sur l'intégrale de Lebesgue, que la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ d'une série absolument convergente $(\sum u_n)_{n\geq 0}$ de nombres complexes peut s'écrire $\int_{\mathbb{N}} u_n \,\mathrm{d}\mu(n)$ où μ est la *mesure de comptage* sur $\mathbb{N}$. Les théorèmes de continuité et de dérivabilité de la somme d'une série de fonctions normalement convergente d'un intervalle I dans $\mathbb{C}$ ressembleront aux résultats bien connus suivants.

Théorème (« continuité et dérivabilité d'une intégrale dépendant d'un paramètre »)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. On note t et x l'abscisse et l'ordonnée dans $[a, b] \times I$.

(a) Si $f\colon [a, b] \times I \to \mathbb{C}$ est continue, alors $F\colon x \mapsto \int_a^b f(t, x)\,\mathrm{d}t$ est continue sur I.

(b) Si $f\colon [a, b] \times I \to \mathbb{C}$ est continue et $\frac{\partial f}{\partial x}$ est définie et continue, alors $F\colon x \mapsto \int_a^b f(t, x)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur I et $F'\colon x \mapsto \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)\,\mathrm{d}t$.

(c) On étudie une intégrale généralisée $F\colon x \mapsto \int_a^{b'} f(t, x)\,\mathrm{d}t$ avec $b' \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ en appliquant (a) et (b) à $F_n\colon x \mapsto \int_a^{b'-\frac{1}{n}} f(t, x)\,\mathrm{d}t$ quand $b' \neq +\infty$ ou $F_n\colon x \mapsto \int_a^{n} f(t, x)\,\mathrm{d}t$ quand $b' = +\infty$.