I. Espaces métriques. Espaces topologiques

Ouverts et fermés de $\mathbb{R}^n$ pour la distance euclidienne

Dans les exercices qui suivent, nous nous proposons, quand il s'agira de démontrer qu'une partie est ouverte ou fermée, de ne pas avoir recours à la continuité d'une fonction bien choisie.

1) a) Soit $A = \{(0,0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Déterminer $\mathring{A}$.
La partie A de $\mathbb{R}^2$ est-elle ouverte ? fermée ?
Indication : l'intérieur d'une partie de $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des centres de boules ouvertes incluses dans cette partie, et l'adhérence d'une partie de $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des limites de suites convergentes dans $\mathbb{R}^2$ de points de cette partie, ce qui donne deux méthodes pour répondre.

   b) Soit $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x < 1 \text{ et } 0 < y \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Déterminer $\mathring{B}$.
La partie B de $\mathbb{R}^2$ est-elle ouverte ? fermée ?

2) a) Quel est l'intérieur dans $\mathbb{R}$ du segment $[0,1]$?

   b) Quel est l'intérieur dans $\mathbb{R}^2$ du segment $[0,1]$ porté par l'axe des abscisses ?

3) Montrer que l'adhérence d'un convexe de $\mathbb{R}^n$ est un convexe de $\mathbb{R}^n$.

Espaces métriques

4) Les applications d_0, δ et $\widetilde{d}$ suivantes sont-elles des distances ?

   a) Sur un ensemble E : $d_0(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$ pour $x, y \in E$.

   b) Sur $\mathbb{R}$: $\delta(x,y) = |\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y|$ pour $x, y \in \mathbb{R}$.

   c) Sur un ensemble E muni d'une distance d : $\widetilde{d}(x,y) = \min(d(x,y), 1)$ pour $x, y \in E$.

5) Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel complexe.
Une norme sur E est une application $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}_+$ qui vérifie les propriétés suivantes :

   1. $\forall x \in E, \quad \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0,$
   2. $\forall x \in E, \lambda \in \mathbb{C}, \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|,$
   3. $\forall x, y \in E, \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

   Montrer que $d(x,y) = \|x - y\|$ définit une distance sur E.

6) On note $\| \ \|_2$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$. Pour $x, y \in \mathbb{R}^2$ on pose :
$$d_T(x,y) = \begin{cases} \|x - y\|_2 & \text{si } x \text{ et } y \text{ sont alignés avec } 0 \\ \|x\|_2 + \|y\|_2 & \text{sinon} \end{cases}$$

   a) Montrer que d_T définit une distance sur $\mathbb{R}^2$ (« distance TGV »).

   b) Décrire géométriquement la boule ouverte $B(x,r)$ pour $x \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$.

7) Soit E un ensemble. Soit $d_0 : E \times E \to \mathbb{R}_+$ l'application définie par
$$\forall x, y \in E \qquad d_0(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = y \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$$
On sait que d_0 est une distance sur E.
Montrer que, dans l'espace métrique (E, d_0), toute partie est à la fois ouverte et fermée.

8) On munit l'ensemble $E = \{-1\} \cup [0,1[$ de la distance induite par la distance usuelle dans $\mathbb{R}$.

a) Les parties suivantes A, B, C de E sont-elles ouvertes, fermées ?

$$A = \{-1\}, \qquad B = [0,1[, \qquad C = \left[0, \tfrac{1}{2}\right].$$

Déterminer leurs intérieurs et adhérences.

b) Comparer l'adhérence de la boule ouverte $B(0,1)$ avec la boule fermée $B_f(0,1)$.

c) Comparer l'intérieur de la boule fermée $B_f(0,1)$ avec la boule ouverte $B(0,1)$.

9) On se place dans un espace métrique (E,d).
Soit $A \subseteq E$. Comparer les diamètres de $\mathring{A}$ et de $\overline{A}$ avec celui de A.

10) On considère un espace métrique non-vide (E,d), un point Ω de E, et une partie A de E.

a) Montrer que A est bornée si et seulement si elle est incluse dans une boule fermée.

b) Montrer que A est bornée si et seulement si elle est incluse dans une boule fermée de centre Ω.

11) On se donne un espace métrique (E,d), et deux points $x, y \in E$ avec $x \neq y$.

Démontrer qu'il existe des ouverts U et V de E tels que :

$$x \in U \quad \text{et} \quad y \in V \quad \text{et} \quad U \cap V = \emptyset.$$

12) Soient A et B deux parties d'un espace métrique (E,d).

a) Comparer $\overline{A \cup B}$ et $\overline{A} \cup \overline{B}$.

b) Comparer $\overline{A \cap B}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$.

Indication : étudier dans $\mathbb{R}$ les parties $\mathbb{Q}$ et $\complement_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$.

13) On se place dans un espace métrique (X,d).
Soit $A \subseteq X$. Montrer que ∂A est fermé.
Comparer les frontières de $\mathring{A}$ et de $\overline{A}$ avec celle de A.