

Espaces métriques et espaces topologiques : à retenir (J-Y D)

Définition

On considère un ensemble E .

(a) Une *distance* sur E est une application $d: E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant :

- (i) $\forall x, y \in E \quad d(x, y) = 0 \iff x = y$;
- (ii) $\forall x, y \in E \quad d(x, y) = d(y, x)$;
- (iii) $\forall x, y, z \in E \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (« inégalité triangulaire »).

(b) On suppose que d est une distance sur E (on dira que (E, d) est un *espace métrique*).

Les *boules ouverte et fermée de centre $x_0 \in E$ et de rayon $r > 0$* sont :

$$B(x_0, r) := \{x \in E \mid d(x, x_0) < r\} \quad \text{et} \quad \tilde{B}(x_0, r) := \{x \in E \mid d(x, x_0) \leq r\}.$$

Le *diamètre* d'une partie non vide A de E est : $\text{diam } A := \sup_{x, y \in A} d(x, y) \leq +\infty$.

Par convention : $\text{diam}(\emptyset) = 0$. On dit qu'une partie A de E est *bornée* si $\text{diam } A < +\infty$.

Exemple

(a) Soient $E = \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) et N la norme euclidienne usuelle sur \mathbb{R}^n .

La *distance* associée à N est l'application $d: E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par :

$$\forall x, y \in E \quad d(x, y) := N(x - y).$$

(b) Soient A un ensemble et (E, d) un espace métrique.

On pose : $d_u(f, g) := \min \left(\sup_{x \in A} d(f(x), g(x)), 1 \right)$ pour $f, g: A \rightarrow E$.

L'application d_u est une distance sur E^A , appelée *distance de la convergence uniforme*.

Définition-Proposition

(a) Soient (E, d) un espace métrique et F une partie de E .

La *distance induite sur F par celle de E* est la distance $(x, y) \in F \times F \mapsto d(x, y)$ sur F .

La *boule ouverte de centre $x_0 \in F$ et de rayon $r > 0$ dans F* est l'intersection avec F de celle de E .

(b) Soient (E_1, d_1) et (E_n, d_n) des espaces métriques.

La *distance produit sur $E_1 \times \dots \times E_n$* est la distance δ_∞ sur $E_1 \times \dots \times E_n$ définie par :

$$\delta_\infty(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} d_i(x_i, y_i) \quad \text{quand} \quad x = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \quad \text{et} \quad y = (y_i)_{1 \leq i \leq n} \quad \text{sont dans} \quad \prod_{1 \leq i \leq n} E_i. \quad (*)$$

La *boule ouverte de centre (x_1, \dots, x_n) et de rayon $r > 0$ dans $E_1 \times \dots \times E_n$* est $B(x_1, r) \times \dots \times B(x_n, r)$.

Définition

(a) Un *espace topologique* est un ensemble X muni d'un ensemble \mathcal{T} de parties de X , tels que :

- (i) $\emptyset \in \mathcal{T}$ et $X \in \mathcal{T}$;
- (ii) l'intersection de deux éléments quelconques de \mathcal{T} appartient à \mathcal{T} ;
- (iii) la réunion d'une famille quelconque d'éléments de \mathcal{T} appartient à \mathcal{T} .

Dans ce cas, cet ensemble \mathcal{T} s'appelle *la topologie* dont on munit de X .

(b) On se donne ici un espace topologique (X, \mathcal{T}) et $a \in X$.

On dit qu'une partie U de X est *ouverte* (ou que U est un *ouvert* de X) si U appartient à \mathcal{T} .

On dit qu'une partie F de X est *fermée* (ou que F est un *fermé* de X) si $\complement_X F$ est ouverte.

On dit qu'une partie V de X est un *voisinage* de a si V contient un ouvert U contenant a .

On note $\mathcal{V}(a)$ l'ensemble des voisinages de a .

(c) On dit qu'un espace topologique (X, \mathcal{T}) est *séparé* (ou que sa topologie est *séparée*) si pour tous $a, b \in X$ distincts, il existe $U \in \mathcal{V}(a)$ et $V \in \mathcal{V}(b)$ tels que $U \cap V = \emptyset$.

(*) Les distances $\delta_1: (x, y) \mapsto \sum_{1 \leq i \leq n} d_i(x_i, y_i)$ et $\delta_2: (x, y) \mapsto \left(\sum_{1 \leq i \leq n} d_i(x_i, y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ sur $E_1 \times \dots \times E_n$ se comparent à δ_∞ au moyen des inégalités suivantes, qui sont « immédiates » : $\delta_\infty \leq \delta_2 \leq \delta_1 \leq \sqrt{n} \delta_2 \leq n \delta_\infty$.

Proposition

Soit (E, d) un espace métrique. On va construire à partir de d une topologie sur E .

(a) Les réunions de familles quelconques de boules ouvertes de E forment une topologie sur E . Cette topologie est séparée. Toute boule ouverte (resp. boule fermée) est ouverte (resp. fermée).

(b) Une partie U de E est ouverte si et seulement :

$$\boxed{\forall x_0 \in U \quad \exists r > 0 \quad B(x_0, r) \subseteq U}.$$

Un voisinage d'un point a de E est une partie de E qui contient une boule ouverte centrée en a .

Exemple

On munit \mathbb{R} de sa distance usuelle $(x, y) \mapsto |x - y|$.

Voici la liste sans répétition des intervalles de \mathbb{R} , où $a, b \in \mathbb{R}$: \emptyset , $]a, b[$ avec $a < b$, $]a, b]$ et $[a, b[$ avec $a < b$, $[a, b]$ avec $a \leq b$, $]a, +\infty[$, $[a, +\infty[$, $] -\infty, b[$, $] -\infty, b]$, \mathbb{R} . Parmi eux, les ouverts sont \emptyset , $]a, b[$ avec $a < b$, $]a, +\infty[$, $] -\infty, b[$, \mathbb{R} ; et les fermés sont \emptyset , $[a, b]$ avec $a \leq b$, $[a, +\infty[$, $] -\infty, b]$, \mathbb{R} .

Définition-Proposition

← (à connaître dans le cas des espaces métriques)

(a) Soient (X, \mathcal{T}) un espace topologique et A une partie de X .

On appelle *intérieur de A* la partie $\overset{\circ}{A} := \{x \in A \mid A \in \mathcal{V}(x)\}$ de X et *adhérence de A* la partie $\overline{A} := \{x \in X \mid \forall V \in \mathcal{V}(x) \quad V \cap A \neq \emptyset\}$ de X .

On a : $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert de X inclus dans A et \overline{A} est le plus petit fermé de X contenant A . En particulier : A est ouverte (resp. fermée) si et seulement si $A = \overset{\circ}{A}$ (resp. $A = \overline{A}$).

On a aussi : $\overset{\circ}{A} \subseteq A \subseteq \overline{A}$, $\mathcal{C}_X \overset{\circ}{A} = \mathcal{C}_X \overline{A}$ et $\mathcal{C}_X \overline{A} = \overline{\mathcal{C}_X A}$.

(b) Soient (X, \mathcal{T}) un espace topologique et A une partie de X .

On dit que A est *dense dans X* si $\overline{A} = X$.

Un point isolé de A est un point de A qui a un voisinage ne contenant pas d'autre point de A .

Un point d'accumulation pour A est un $x \in X$ dont tout voisinage contient un point de $A \setminus \{x\}$.

Ainsi \overline{A} est la réunion disjointe de l'ensemble des points isolés de A et de l'ensemble des points d'accumulation pour A .

(c) Soit (E, d) un espace métrique et A une partie de E . On verra plus tard la définition d'une « suite convergente dans E » (définition connue dans le cas où E est égal à \mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n , $n \in \mathbb{N}$).

\overline{A} est l'ensemble des limites des suites d'éléments de A qui convergent dans E ^(*).

Les points d'accumulations de A sont les $x \in E$ limite d'une suite convergente d'éléments de $A \setminus \{x\}$.

Définition-Proposition

(a) Soient (X, \mathcal{T}) un espace topologique et Y une partie de X .

La *topologie induite sur Y par celle de X* est la topologie $\mathcal{U} := \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{T}\}$ sur Y .

(Lorsque \mathcal{T} provient d'une distance, la topologie induite provient de la distance induite.)

Les ouverts, fermés, voisinages d'un point a de Y dans Y sont les intersections avec Y de ceux de X .

Lorsque la topologie de X est séparée, la topologie induite sur Y est séparée.

(b) Soient $(X_1, \mathcal{T}_1), \dots, (X_n, \mathcal{T}_n)$ des espaces topologiques.

La *topologie produit sur $X_1 \times \dots \times X_n$* est la topologie dont les éléments sont les réunions de parties de la forme $U = U_1 \times \dots \times U_n$ avec $U_1 \in \mathcal{T}_1, \dots, U_n \in \mathcal{T}_n$.

(Lorsque $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_n$ proviennent de distances, la topologie produit provient de la distance produit.)

Les voisinages d'un point (a_1, \dots, a_n) de $X_1 \times \dots \times X_n$ sont les parties de $X_1 \times \dots \times X_n$ qui contiennent un certain $U_1 \times \dots \times U_n$ avec U_1 ouvert de X_1 contenant a_1, \dots, U_n ouvert de X_n contenant a_n .

Lorsque les topologies de X_1, \dots, X_n sont séparées, la topologie produit sur $X_1 \times \dots \times X_n$ est séparée.

(c) Soit $((X_i, \mathcal{T}_i))_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques.

La *topologie produit sur $\prod_{i \in I} X_i$* est la topologie dont les éléments sont les réunions de parties de

la forme $U = \prod_{i \in I} U_i$ avec $U_i \in \mathcal{T}_i$ pour tout $i \in I$ et l'ensemble $J := \{i \in I \mid U_i \neq X_i\}$ est fini.

(*) Cette caractérisation, très utile, est *fausse* dans le cas d'un espace topologique quelconque.