I. Espaces métriques. Espaces topologiques

Exercices supplémentaires

1) On munit $\mathbb{R}$ de sa distance usuelle $d\colon (x,y) \mapsto |x-y|$.
Montrer que $[0,1[$ n'est ni ouvert ni fermé dans $\mathbb{R}$.

2) On munit $\mathbb{Q}$ de sa distance usuelle $d\colon (x,y) \mapsto |x-y|$.
On pose $A = \left]-\infty, \sqrt{2}\right[\cap \mathbb{Q}$.
Démontrer que la partie A de $\mathbb{Q}$ est à la fois ouverte et fermée dans $\mathbb{Q}$.(*)

3) On considère sur le carré $X = [0,1] \times [0,1]$ l'application $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_+$ donnée par :
$$d((x,y),(x',y')) = \begin{cases} |x-x'| & \text{si } y = y', \\ 1/2 & \text{sinon.} \end{cases}$$
On admettra que d est une distance sur X.
   1. Soit $O = (0,0) \in X$. Décrire explicitement et dessiner sans justification les parties de X suivantes :
   (a) $B(O,1/2)$, (b) $B_f(O,1/2)$, (c) $\overline{B(O,1/2)}$.
   2. Donner sans justification le diamètre des parties de X suivantes :
   (a) $A = \{0\} \times [0,1]$, (b) $B =]0,1[\times \{0\}$.

4) On note : $\|(x,y)\|_\infty := \max(|x|,|y|)$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
On considère les points suivants dans $\mathbb{R}^2$: $O = (0,0)$, $M = (1,0)$, $N = (0,1)$.
On note : $[O,M] = \{(x,0)\ ;\ 0 \le x \le 1\}$ et $[O,N] = \{(0,y)\ ;\ 0 \le y \le 1\}$.
On pose : $E = [O,M] \cup [O,N]$.
On munit E de la distance d_∞ définie par : $d_\infty(P,Q) := \|P-Q\|_\infty$ pour $P,Q \in E$.
   a) Décrire, sans justification, la boule ouverte $B(M,1)$ et la boule fermée $B_f(M,1)$.
   Illustrer la situation à l'aide d'une figure.
   b) Dans (E, d_∞), la boule fermée $B_f(M,1)$ est-elle égale à l'adhérence de la boule ouverte $B(M,1)$? Justifier.

5) On munit $\mathbb{R}^2$ de sa distance euclidienne usuelle.
Quel est l'intérieur dans $\mathbb{R}^2$ du cercle unité $\mathscr{C} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$?

Ouverts et fermés de $\mathbb{R}^n$ pour la distance euclidienne

Dans les exercices qui suivent, nous nous proposons, quand il s'agira de démontrer qu'une partie est ouverte ou fermée, de ne pas avoir recours à la continuité d'une fonction bien choisie.

1) a) Soit $A = \{(0,0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Déterminer $\mathring{A}$.
La partie A de $\mathbb{R}^2$ est-elle ouverte ? fermée ?
Indication : l'intérieur d'une partie de $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des centres de boules ouvertes incluses dans cette partie, et l'adhérence d'une partie de $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des limites de suites convergentes dans $\mathbb{R}^2$ de points de cette partie, ce qui donne deux méthodes pour répondre.
   b) Soit $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x < 1 \text{ et } 0 < y \le 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Déterminer $\mathring{B}$.
   La partie B de $\mathbb{R}^2$ est-elle ouverte ? fermée ?

2) a) Quel est l'intérieur dans $\mathbb{R}$ du segment $[0,1]$?

(*) On rappelle que $\sqrt{2}$ n'appartient pas à $\mathbb{Q}$ (inutile de le démontrer).

b) Quel est l'intérieur dans $\mathbb{R}^2$ du segment $[0,1]$ porté par l'axe des abscisses ?

3) a) Montrer que l'adhérence d'un convexe de $\mathbb{R}^n$ est un convexe de $\mathbb{R}^n$.
b) Ce résultat reste-t-il vrai pour l'intérieur ?

4) a) Soit $G \neq \{0\}$ un sous-groupe du groupe additif $(\mathbb{R},+)$. On pose $a = \inf\{x \in G \mid x > 0\}$.
Montrer que : si $a > 0$, $G = a\mathbb{Z}$ et $a\mathbb{Z}$ est fermé dans $\mathbb{R}$; si $a = 0$, G est dense dans $\mathbb{R}$.
b) Soit $\omega = \mathrm{e}^{2i\pi\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ un nombre complexe de module 1.
On pose $H = \{\omega^n \ ; \ n \in \mathbb{Z}\}$. Déterminer l'adhérence de H dans $\mathbb{C}$.
Indication : lorsque $\alpha \notin \mathbb{Q}$, étudier la partie $G := \{x \in \mathbb{R} \mid \mathrm{e}^{2i\pi x} \in H\}$ de $\mathbb{R}$.

Espaces métriques

5) On pose : $\|(x_1,x_2)\|_{1/2} = (|x_1|^{1/2}+|x_2|^{1/2})^2$ pour $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$ ($\| \ \|_{1/2}$ n'est pas une « norme »).
Existe-t-il une distance $d_{1/2}$ sur $\mathbb{R}^2$ dont les boules ouvertes sont exactement les parties de la forme $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x-a\|_{1/2} < r\}$ avec $a \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$?

6) Les applications d_0, δ et $\widetilde{d}$ suivantes sont-elles des distances ?
a) Sur un ensemble E : $d_0(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$ pour $x,y \in E$.
b) Sur $\mathbb{R}$: $\delta(x,y) = |\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y|$ pour $x,y \in \mathbb{R}$.
c) Sur un ensemble E muni d'une distance d : $\widetilde{d}(x,y) = \min(d(x,y),1)$ pour $x,y \in E$.

7) Soit $(E,+,\cdot)$ un espace vectoriel complexe.
Une norme sur E est une application $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}_+$ qui vérifie les propriétés suivantes :

1. $\forall x \in E, \quad \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$,
2. $\forall x \in E, \lambda \in \mathbb{C}, \quad \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$,
3. $\forall x,y \in E, \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Montrer que $d(x,y) = \|x-y\|$ définit une distance sur E.

8) On note $\| \ \|_2$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$. Pour $x,y \in \mathbb{R}^2$ on pose :
$$d_T(x,y) = \begin{cases} \|x-y\|_2 & \text{si } x \text{ et } y \text{ sont alignés avec } 0 \\ \|x\|_2 + \|y\|_2 & \text{sinon} \end{cases}$$
a) Montrer que d_T définit une distance sur $\mathbb{R}^2$ (« distance TGV »).
b) Décrire géométriquement la boule ouverte $B(x,r)$ pour $x \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$.

9) Soit E un ensemble. Soit $d_0 : E \times E \to \mathbb{R}_+$ l'application définie par
$$\forall x,y \in E \qquad d_0(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = y \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$$
On sait que d_0 est une distance sur E.
Montrer que, dans l'espace métrique (E,d_0), toute partie est à la fois ouverte et fermée.

10) On munit l'ensemble $E = \{-1\} \cup [0,1[$ de la distance induite par la distance usuelle dans $\mathbb{R}$.
a) Les parties suivantes A, B, C de E sont-elles ouvertes, fermées ?
$$A = \{-1\}, \qquad B = [0,1[, \qquad C = \left[0,\tfrac{1}{2}\right].$$
Déterminer leurs intérieurs et adhérences.
b) Comparer l'adhérence de la boule ouverte $B(0,1)$ avec la boule fermée $B_f(0,1)$.
c) Comparer l'intérieur de la boule fermée $B_f(0,1)$ avec la boule ouverte $B(0,1)$.

11) On se place dans un espace métrique (E,d).
Soit $A \subseteq E$. Comparer les diamètres de $\mathring{A}$ et de $\overline{A}$ avec celui de A.

12) On considère un espace métrique non-vide (E,d), un point Ω de E, et une partie A de E.

a) Montrer que A est bornée si et seulement si elle est incluse dans une boule fermée.

b) Montrer que A est bornée si et seulement si elle est incluse dans une boule fermée de centre Ω.

13) On se donne un espace métrique (E,d), et deux points $x,y\in E$ avec $x\neq y$.

Démontrer qu'il existe des ouverts U et V de E tels que :
$$x\in U \quad \text{et} \quad y\in V \quad \text{et} \quad U\cap V=\emptyset.$$

14) Une distance d sur un ensemble E est dite *ultramétrique* si elle vérifie :
$$\forall x,y,z\in E \quad d(x,z)\leq \max\big(d(x,y),d(y,z)\big).$$

a) Sur l'ensemble $E=\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ des suites de nombres complexes, on définit la *valuation* v par
$$v(a)=\min\{n\in\mathbb{N} \mid a_n\neq 0\} \text{ quand } a=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E\setminus\{0\} \quad \text{et} \quad v(0)=+\infty.$$
Montrer que l'application $d\colon (a,b)\mapsto 2^{-v(a-b)}$ est une distance ultramétrique sur E.

b) Montrer que dans un espace muni d'une distance ultramétrique :
(i) tout triangle est isocèle (c'est-à-dire il a deux cotés de même longueur) ;
(ii) n'importe quel point d'une boule ouverte ou fermée est centre de cette boule ;
(iii) deux boules ouvertes sont soit disjointes, soit l'une incluse dans l'autre ;
(iv) les boules fermées sont des ouverts et les boules ouvertes sont des fermés.

15) Soit $(X,\mathscr{T})$ un espace topologique. On note $\operatorname{diag} X^2=\{(x,x)\ ;\ x\in X\}$.
Démontrer que X est séparé si et seulement si $\operatorname{diag} X^2$ est fermé dans $X\times X$.

16) On note $X=(\mathbb{R}\backslash\{0\})\cup\{0',0''\}$ dans $\mathbb{R}^2$, où $\mathbb{R}$ est identifié avec (Ox), $0'=(0,1)$ et $0''=(0,-1)$.
On pose(⋆) : $\mathscr{T} = \big\{V\big\}_{V \text{ ouvert de } \mathbb{R}\backslash\{0\}} \cup \big\{(W\setminus\{0\})\cup F\big\}_{W \text{ ouvert de } \mathbb{R} \text{ contenant } 0 \text{ et } F\subseteq\{0',0''\}}$.
Montrer que $\mathscr{T}$ est une topologie non-séparée sur X (« droite réelle avec origine dédoublée »).

17) On considère sur $\mathbb{R}^2$ les distances « discrète », « euclidienne » et « TGV » :
d_0 de l'exercice 6, $d_2\colon (x,y)\mapsto \|x-y\|_2$ et la distance d_T de l'exercice 8.
Les topologies sur $\mathbb{R}^2$ associées à d_0 et d_T sont-elles égales à la topologie usuelle associée à d_2 ?

18) Soient A et B deux parties d'un espace métrique (E,d).

a) Comparer $\overline{A\cup B}$ et $\overline{A}\cup\overline{B}$.

b) Comparer $\overline{A\cap B}$ et $\overline{A}\cap\overline{B}$.
Indication : étudier dans $\mathbb{R}$ les parties $\mathbb{Q}$ et $\complement_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$.

19) Soit A une partie d'un espace topologique $(X,\mathscr{T})$.

a) Montrer que : $\mathring{\mathring{A}}=\mathring{A}$ et $\overline{\overline{A}}=\overline{A}$. En déduire que : $\overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}}=\overline{\mathring{A}}$ et $\mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}}=\mathring{\overline{A}}$.

b) Quelles sont les 7 parties de X qu'on obtient en itérant les opérations $\mathring{}$ et $\bar{}$ à partir de A ?

c) Montrer que ces parties sont distinctes quand $X=\mathbb{R}$ et $A=(\mathbb{Q}\cap[0,1])\cup[2,3[\cup]3,4]\cup\{5\}$.

20) On se place dans un espace métrique (X,d).
Soit $A\subseteq X$. Montrer que ∂A est fermé.
Comparer les frontières de $\mathring{A}$ et de $\overline{A}$ avec celle de A.

21) Soit (X,d) un espace métrique, Y un sous-ensemble de X.
On munit Y de la topologie induite par celle de X et on note, pour toute partie A de Y :
$\overline{A}^Y$ l'adhérence de A dans Y ; $\overline{A}^X$ l'adhérence de A dans X ;
$\mathring{A}^Y$ l'intérieur de A dans Y ; $\mathring{A}^X$ l'intérieur de A dans X.

a) Montrer que $\overline{A}^Y=\overline{A}^X\cap Y$.

b) Montrer que $\mathring{A}^Y\supseteq\mathring{A}^X$ et donner un exemple où l'inclusion est stricte.

(⋆) Il est « clair » (pourquoi ?) que les ouverts de $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ sont les ouverts de $\mathbb{R}$ qui sont inclus dans $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.