

Variables aléatoires réelles : à retenir

Définition (probabilité)

(a) La *somme* d'une famille dénombrable $(a_i)_{i \in I}$ de réels positifs est :

$$\underbrace{\sum_{i \in I} a_i}_{\text{indépendant du choix de la numérotation}} := \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{(a_{i_0} + a_{i_1} + \dots + a_{i_n})}_{\text{croissant en } n} \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\} \quad \text{où } I = \underbrace{\{i_n\}}_{\text{distincts}}; n \in \mathbb{N}.$$

hors programme

(b) Une *probabilité* sur un ensemble Ω est une application \mathbb{P} qui à certaines parties A (il faudrait préciser) de Ω associe un réel $\mathbb{P}(A) \in [0, 1]$ de façon que :

$\mathbb{P}(\Omega) = 1$ et $\mathbb{P}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$ quand $A_n, n \in \mathbb{N}$, sont des événements deux à deux disjoints.

(c) La probabilité uniforme sur un ensemble fini non-vide Ω est la probabilité \mathbb{P} définie par :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega} \quad \text{pour } A \subseteq \Omega.$$

Dans la suite : on fixe une probabilité \mathbb{P} sur un ensemble Ω (muni d'« événements »).

Définition-Proposition (loi de probabilité d'une v. a. r. et fonction de répartition)

hors programme

(a) Une variable aléatoire réelle sur Ω est une application X de Ω dans \mathbb{R} telle que pour tous $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ avec $a \leq b$, l'ensemble $\underbrace{\{\omega \in \Omega \mid a \leq X(\omega) \leq b\}}_{\{a \leq X \leq b\}}$ est un événement.

Sa *loi de probabilité* est la probabilité \mathbb{P}_X sur \mathbb{R} telle que :

$$\mathbb{P}_X([a, b]) = \mathbb{P}(a \leq X \leq b) \quad \text{dès que } -\infty \leq a \leq b \leq +\infty.$$

(b) On se donne une v. a. r. X sur Ω .

La *fonction de répartition* F_X de X , qui détermine la loi \mathbb{P}_X de X , est définie par :

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Ainsi l'application $F_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue à droite et croissante de $\underbrace{0}_{\text{en } -\infty}$ à $\underbrace{1}_{\text{en } +\infty}$ (*).

Définition-Proposition (loi discrète et loi à densité)

On se donne une v. a. r. X sur Ω .

(a) On suppose ici que Ω est fini ou dénombrable, de la forme :

$$\Omega = \underbrace{\{\omega_n\}}_{\text{distincts}}; n \in \mathbb{N}' \quad \text{avec } \mathbb{N}' = \underbrace{\{0, 1, \dots, N\}}_{\text{fixé dans } \mathbb{N}} \text{ ou } \mathbb{N}' = \mathbb{N}.$$

La donnée d'une probabilité Q sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ équivaut à la donnée d'une suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}'}$ de réels positifs vérifiant $\sum_{n \in \mathbb{N}'} p_n = 1$, au moyen des égalités suivantes : $p_n = Q(\{\omega_n\})$ pour tout $n \in \mathbb{N}'$.

(b) On dit que X est *discrète* s'il existe une suite de nombres réels de la forme $(x_n)_{n \in \mathbb{N}'}$ avec $\mathbb{N}' = \{0, 1, \dots, N\}$ ou $\mathbb{N}' = \mathbb{N}$, telle que $\text{Im } X \subseteq \underbrace{\{x_n\}}_{\text{fixé dans } \mathbb{N}}_{n \in \mathbb{N}'}$.

Dans ce cas \mathbb{P}_X est déterminée par la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}'}$ suivante : $p_n = \mathbb{P}(X = x_n)$ pour $n \in \mathbb{N}'$.

(c) On dit que X *admet pour densité une fonction* (« mesurable ») $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ si :

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b p(x) dx \quad \text{quand } -\infty \leq a \leq b \leq +\infty.$$

Ceci équivaut à : $F_X(x) = \int_{-\infty}^x p(t) dt$ pour $x \in \mathbb{R}$. ← [Donc : $p(x_0) = F'_X(x_0)$ si p est continu en un $x_0 \in \mathbb{R}$.]

Une fonction mesurable $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ est associée à une telle X si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1$.

(d) La v. a. r. X admet pour densité F'_X (définie sauf en a_1, \dots, a_p) quand il existe $a_1 < \dots < a_p$ dans \mathbb{R} tels que $F_X|_{]-\infty, a_1[}$, $F_X|_{]a_1, a_2[}$, ..., $F_X|_{]a_p, +\infty[}$ sont de classe C^1 .

(*) Réciproquement, toute $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue à droite et croissante de 0 à 1 est une fonction de répartition.

Définition-Proposition (v. a. r. indépendantes)

(a) On dit que des v. a. r. X_1, \dots, X_n sur Ω sont *indépendantes* si :

$\mathbb{P}(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n) = \mathbb{P}(X_1 \in B_1) \dots \mathbb{P}(X_n \in B_n)$ pour tous évènements $B_1, \dots, B_n \subseteq \mathbb{R}$, c'est-à-dire $\mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1) \dots \mathbb{P}(X_n \leq x_n)$ pour tous $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$.

Dans ce cas, pour $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ et pour toutes fonctions (mesurables) $h_1: \mathbb{R}^{i_1} \rightarrow \mathbb{R}, \dots, h_k: \mathbb{R}^{i_k - i_{k-1}} \rightarrow \mathbb{R}$, les v. a. r. $h_1(X_1, \dots, X_{i_1}), \dots, h_k(X_{i_{k-1}+1}, \dots, X_{i_k})$ sont aussi indépendantes.

(b) Quand X_1, \dots, X_n sont discrètes, l'indépendance de X_1, \dots, X_n équivaut à :

$\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_1 = x_1) \dots \mathbb{P}(X_n = x_n)$ pour tous $x_1 \in \text{Im}(X_1), \dots, x_n \in \text{Im}(X_n)$.

(c) Plus généralement, on dira qu'une suite $(X_n)_{n \geq 0}$ de v. a. r. sur Ω est formée de v. a. r. indépendantes si : X_1, \dots, X_n sont indépendantes pour tout $n \geq 0$.

Définition-Proposition (espérance)

On se donne deux v. a. r. X et Y sur Ω .

(a) On suppose X discrète.

On pose : $\mathbb{E}(|X|) = \sum_{n \in \mathbb{N}'} |x_n| \mathbb{P}(X = x_n) \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N x_n \mathbb{P}(X = x_n)$ quand $\mathbb{N}' = \mathbb{N}$

Lorsque $\mathbb{E}(|X|) < +\infty$, on définit *l'espérance de X* : $\mathbb{E}(X) = \sum_{n \in \mathbb{N}'} x_n \mathbb{P}(X = x_n)$.

on dit que « X a un moment d'ordre 1 »

(b) On suppose que X a une densité p .

On pose : $\mathbb{E}(|X|) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| p(x) dx \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

Lorsque $\mathbb{E}(|X|) < +\infty$, on définit *l'espérance de X* : $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx$.

on dit que « X a un moment d'ordre 1 »

(c) On peut construire $\mathbb{E}(|X|) \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, puis définir $\mathbb{E}(X) \in \mathbb{R}$ tel que $|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(|X|)$ lorsque $\mathbb{E}(|X|) < +\infty$, en généralisant (a) et (b) de façon que \mathbb{E} soit croissante et linéaire (unicité).
cas $X \geq 0$ cas où $\mathbb{E}(|X|) < +\infty$

Les v. a. r. X et Y ont même loi si et seulement si $\mathbb{E}(h(X)) = \mathbb{E}(h(Y))$ pour tout $h \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(d) On suppose que $\mathbb{E}(|X|) < +\infty$ et $\mathbb{E}(|Y|) < +\infty$. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

On a : $\mathbb{E}(1) = 1$ et $\mathbb{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda \mathbb{E}(X) + \mu \mathbb{E}(Y)$.

Quand X et Y sont indépendantes, on a : $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Définition-Proposition (variance)

On se donne deux v. a. r. X et Y sur Ω .

(a) On suppose que $\mathbb{E}(X^2) < +\infty$. Donc $\mathbb{E}(|X|) < +\infty$.

on dit que « X a un moment d'ordre 2 »

On définit *la variance* $\text{Var}(X) = \underbrace{\mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2}_{\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)}$ et *l'écart type* $\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$ de X .

(b) On suppose que $\mathbb{E}(X^2) < +\infty$ et $\mathbb{E}(Y^2) < +\infty$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

On a : $\text{Var}(\lambda X) = \lambda^2 \text{Var}(X)$ et $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2(\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y))$.

Quand X et Y sont indépendantes, on a : $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$.

Proposition (théorème de transfert et retour sur l'indépendance)

On se donne deux v. a. r. X et Y sur Ω .

(a) On suppose que X est discrète et somme sur « $x \in \mathbb{R}$ » au sens de « $x \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(X = x) \neq 0$ ». On a : $\mathbb{E}(h(X)) = \sum_{x \in \mathbb{R}} h(x) \mathbb{P}(X = x)$ pour $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ ou $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avec $\mathbb{E}(|h(X)|) < +\infty$.

(b) Soit $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ mesurable telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1$.

On a : X a pour densité p si et seulement si $\mathbb{E}(h(X)) \stackrel{(\star)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)p(x)dx$ pour $h \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Dans ce cas on a (\star) pour $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ mesurable ou $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable et $\mathbb{E}(|h(X)|) < +\infty$.

(c) Les v. a. r. X et Y sont indépendantes si et seulement si :

$$\mathbb{E}(h(X)k(Y)) = \mathbb{E}(h(X))\mathbb{E}(k(Y)) \text{ pour tous } h, k \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$