II. Suites et applications continues

Suites

1) Soit $d_0 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ l'application définie par

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \qquad d_0(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = y \\ 1 \text{ sinon} \end{cases} .$$

On a vu en TD que d_0 est une distance sur $\mathbb{R}$.

La suite $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \geq 0}$ a-t-elle une limite l dans $\mathbb{R}$ au sens de d_0 lorsque $n \to +\infty$?

2) Démontrer que la distance $d_u \colon (f,g) \mapsto \min(\|f-g\|_\infty, 1)$ où $\|f-g\|_\infty := \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - g(x)|$, sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, est telle qu'une suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ converge vers f au sens de d_u si et seulement si elle converge uniformément vers f.

3) Dans les espaces métriques $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^3$ munis de leur distance usuelle, déterminer l'intérieur, l'adhérence et la frontière de chacun des sous-ensembles suivants :

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \left\{\frac{1}{n}\right\} \qquad \text{et} \qquad B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z - x^2 \geq 0, y > x\}.$$

4) Soient f et g deux applications d'un espace métrique E dans un espace métrique F.
On suppose que f et g sont continues et coïncident sur une partie dense D de E.
Montrer qu'elles sont égales.

Continuité

5) Montrer directement la continuité (pour les topologies usuelles) des applications suivantes :

$$f_1 \colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x \end{array} ; \qquad f_2 \colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array} ; \qquad f_3 \colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & xy \end{array} ; \qquad f_4 \colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} & \to & \mathbb{R}. \\ (x,y) & \mapsto & \frac{x}{y} \end{array}$$

6) Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel complexe et $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}_+$ une norme sur E.
En TD, nous avons vu que $d(x,y) = \|x - y\|$, $(x, y \in E)$ définit une distance sur E.
Démontrer que la somme et la multiplication par un scalaire sont continues, c'est-à-dire que :

$$\begin{array}{rcl} E \times E & \to & E \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{rcl} \mathbb{C} \times E & \to & E \\ (\lambda, x) & \mapsto & \lambda x \end{array}$$

sont continues. ($\mathbb{C}$ est muni de sa distance usuelle $d(z,z') = |z - z'|$, $z, z' \in \mathbb{C}$).

7) L'application $f \colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \left\{ \text{ou} \begin{array}{l} 1 \text{ si } x+y \geq 0 \\ 0 \text{ si } x+y < 0 \end{array} \right. \end{array}$ est-elle continue ?

8) Montrer que $GL(n, \mathbb{R})$ est un ouvert dense de $\mathfrak{M}(n, \mathbb{R})$.

9) Soit (E, d) un espace métrique. On munit $E \times E$ de la distance produit δ_∞.

a) Démontrer que $d \colon E \times E \to \mathbb{R}^+$ est continue.

b) Soit $A \subseteq E$ non-vide. Pour tout $x \in E$, on pose : $d(x, A) = \inf\limits_{a \in A} d(x, a)$.
Démontrer que l'application $x \mapsto d(x, A)$ est continue de E dans $\mathbb{R}^+$.

c) Vérifier que : $\overline{A} = \{x \in E \mid d(x, A) = 0\}$.

d) Soit $x \in E$. A-t-on : $d(x, \overline{A}) = d(x, A)$?

10) a) Démontrer que $f \colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \end{array}$ est continue.

b) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Démontrer que la restriction de f à la demi-droite $D_\theta = \{(r \cos\theta, r \sin\theta) \ ; \ r > 0\}$ admet pour limite 0 lorsque $(x,y) \to (0,0)$ avec $(x,y) \in D_\theta$.

c) L'application f a-t-elle un prolongement par continuité $\widetilde{f} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$?

11) On munit $\mathbb{C}^2$ et $\mathbb{C}$ de leur topologie usuelle.
On note $\mathscr{C} = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid x^3 = y^2\}$.
On définit
$$f\colon \begin{array}{ccc} \mathscr{C}\backslash\{(1,1)\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{y+1}{x-1} & \text{si } x\neq 1 \\ \text{ou} & \\ -\frac{3}{2} & \text{si } x=1 \text{ (auquel cas } y=-1) \end{cases} \end{array}$$
On admettra que $f(x,y) = \frac{x^2+x+1}{y-1}$ quand $y \neq 1$.

a) Montrer que $U = \{(x,y) \in \mathscr{C} \mid x \neq 1\}$ et $V = \{(x,y) \in \mathscr{C} \mid y \neq 1\}$ sont des ouverts de $\mathscr{C}\backslash\{(1,1)\}$.

b) Démontrer que f est continue.

c) Existe-t-il une application continue $\widetilde{f} : \mathscr{C} \to \mathbb{C}$ dont la restriction à $\mathscr{C}\backslash\{(1,1)\}$ est f ?

12) L'application
$$h\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} x^2 & \text{si } |x|\leq|y| \\ \text{ou} & \\ y^2 & \text{si } |x|>|y| \end{cases} \end{array}$$
est-elle continue ?

13) On munit $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}$ de leur distance usuelle.
On note
$$p\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ (x,y) & \longmapsto & x \end{array}$$

a) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Démontrer que $p(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

b) Démontrer que $H\colon xy = 1$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$ mais que $p(H)$ n'est pas un fermé de $\mathbb{R}$.

14) On considère l'application $g\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \mapsto \mathbb{R}$ définie par :
$$g(x,y) = \begin{cases} \|(x,y)\|_1 = |x| + |y| & \text{s'il existe } r \in \mathbb{Q} \text{ tel que } y = rx \\ \|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2} & \text{sinon} \end{cases}.$$
Démontrer que g a un prolongement continu en $(0,0)$.
<u>Indication</u> : on pourra commencer par démontrer que $\|(x,y)\|_2 \leq \|(x,y)\|_1$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Homéomorphisme

15) Montrer que les segments $[0,1]$ et $[-1,1]$ sont homéomorphes.

16) On considère le cercle unité $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$.

a) L'application
$$f\colon \begin{array}{ccc} [0,2\pi[& \to & S^1 \\ t & \mapsto & (\cos t, \sin t) \end{array}$$
est-elle un homéomorphisme ?

b) Même question pour l'application
$$g\colon \begin{array}{ccc}]0,2\pi[& \to & S^1 \setminus \{(1,0)\}. \\ t & \mapsto & (\cos t, \sin t) \end{array}$$

Continuité uniforme

17) L'application $f\colon x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ de $]0,1]$ dans $\mathbb{R}$ est-elle uniformément continue ?

Distances équivalentes

18) On considère sur $\mathbb{R}^2$ les distances « euclidienne » d_2 et « TGV » d_T.

a) L'application $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ est-elle continue de $(\mathbb{R}^2, d_T)$ dans $(\mathbb{R}^2, d_2)$? de $(\mathbb{R}^2, d_2)$ dans $(\mathbb{R}^2, d_T)$?

b) Soit $a \in \mathbb{R}^2$. Déduire du a) que l'application $x \mapsto d_2(a,x)$ est continue de $(\mathbb{R}^2, d_T)$ dans $\mathbb{R}$.

19) Soit (E,d) un espace métrique. On pose : $\widetilde{d}(x,y) = \min(d(x,y),1)$ pour $x,y \in E$.

a) Montrer que les distances d et $\widetilde{d}$ sont topologiquement équivalentes.

b) Sont-elles toujours Lipschitz-équivalentes ?