Suites et applications continues : à retenir (J-Y D)

On considère des espaces métriques (E, d_E) et (F, d_F), et des espaces topologiques X, Y et Z.

Définition

(a) On dit qu'une application $f\colon E \to F$ est *continue en* $a \in E$ si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in E \quad \big(\, d_E(x,a) < \alpha \implies d_F(f(x), f(a)) < \varepsilon \,\big).$$

On dit qu'une telle application $f\colon E \to F$ est *continue* si elle est continue en tout point de E.

(b) On dit qu'une suite $\big(u_n\big)_{n\geq 0}$ d'éléments de E *a pour limite* $l \in E$ *quand* $n \to +\infty$ si :

$$\underbrace{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \big(\, n \geq N \implies d_E(u_n, l) < \varepsilon \,\big)}_{\text{signifie que } d_E(u_n,l) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}.$$

On notera comme d'habitude « $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ » pour exprimer que $\big(u_n\big)_{n\geq 0}$ a pour limite l.

utile plus tard

(c) On dit qu'une suite $\big(u_n\big)_{n\geq 0}$ d'éléments de E *a pour valeur d'adhérence* $\lambda \in E$ si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \big(\, n \geq N \text{ et } d_E(u_n, \lambda) < \varepsilon \,\big).$$

Remarque

On suppose que les espaces métriques produits usuels $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$ sont munis de bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$.

(a) Si $f\colon \underset{\text{partie de } \mathbb{R}^p}{A} \longrightarrow \mathbb{R}^q$ envoie tout $\underset{/\mathscr{B}}{v}\left|\begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{matrix}\right. \in A$ sur $\underset{/\mathscr{C}}{f(v)}\left|\begin{matrix} f_1(x_1,\ldots,x_p) \\ \vdots \\ f_q(x_1,\ldots,x_p) \end{matrix}\right. \in \mathbb{R}^q$ et $\underset{/\mathscr{B}}{a}\left|\begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{matrix}\right. \in A$, on a :

f est continue en a si et seulement si f_1 et ... et f_q sont continues en $(a_1, \ldots, a_p)$.

(b) Si une suite $\big(u_n\big)_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathbb{R}^p$ s'écrit $\underset{/\mathscr{B}}{u_n}\left|\begin{matrix} x_{1,n} \\ \vdots \\ x_{p,n} \end{matrix}\right.$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $\underset{/\mathscr{B}}{l}\left|\begin{matrix} l_1 \\ \vdots \\ l_p \end{matrix}\right. \in \mathbb{R}^p$, on a :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \text{ si et seulement si } x_{1,n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l_1 \text{ et ... et } x_{p,n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l_p.$$

Définition-Proposition

(a) On dit qu'une application $f\colon X \to Y$ est *continue en* $a \in X$ si :

$$\forall V \in \mathcal{V}(f(a)) \quad \underbrace{\exists U \in \mathcal{V}(a) \quad f(U) \subseteq V}_{\text{signifie que } f^{-1}(V) \text{ est un voisinage de } a}.$$

Lorsque $X = E$ et $Y = F$, l'application f est continue en a si et seulement si :

toute suite $\big(u_n\big)_{n\geq 0}$ dans E telle que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$ vérifie $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(a)$ dans F.

(b) On dit qu'une application $f\colon X \to Y$ est *continue* si elle est continue en tout point de X.

hors programme

(c) On se donne $A \subseteq X$ et $a \in \overline{A}$ (par exemple $A = X$ et $a \in X$), et $l \in Y$.

On dit qu'une application $f\colon A \to Y$ a *pour limite* l *quand* $x \to a$ *avec* $x \in A$ si :

$$\forall V \in \mathcal{V}(l) \quad \exists U \in \mathcal{V}(a) \quad f(U \cap A) \subseteq V. \qquad \longleftarrow\text{[voisinages dans } Y \text{ et dans } X\text{]}$$

On notera « $f(x) \underset{x\to a,\, x\in A}{\longrightarrow} l$ » pour exprimer que f a pour limite l quand $x \to a$ avec $x \in A$.$^{(\star)}$

Dans ce cas et lorsque Y est séparé, cet élément l de Y est unique et noté $\lim\limits_{x\to a,\, x\in A} f(x)$.

(d) On dit qu'une suite $\big(u_n\big)_{n\geq 0}$ d'éléments de Y *a pour limite* $l \in Y$ *quand* $n \to +\infty$ si :

$$\forall V \in \mathcal{V}(l) \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \big(\, n > N \implies u_n \in V \,\big).$$

Il s'agit du cas particulier du (c) avec $\underbrace{X = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}}_{\text{on prolonge } u_\cdot \text{ avec une valeur de } u_{+\infty} \text{ arbitraire}}$ (donc $X \subseteq \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$) et $A = \mathbb{N}$.

$(\star)$ Quand $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$, on obtient les notions de limites finies suivantes :
$x \to a$ ($X = A = \mathbb{R}$), $x \underset{x\neq a}{\longrightarrow} a$ ($X = \mathbb{R}$ et $A = \mathbb{R}\setminus\{a\}$), $x \to a^-$ ($X = \mathbb{R}$ et $A =]-\infty, a[$), $x \to a^+$ ($X = \mathbb{R}$ et $A =]a, +\infty[$), $x \to -\infty$ ($\underbrace{X = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}}_{\text{on prolonge } f \text{ avec une valeur de } f(-\infty) \text{ arbitraire}}$ et $A = \mathbb{R}$), $x \to +\infty$ ($\underbrace{X = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}}_{\text{on prolonge } f \text{ avec une valeur de } f(+\infty) \text{ arbitraire}}$ et $A = \mathbb{R}$).

Dans ces derniers exemples, la topologie de $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ est celle qui induit la topologie de $\mathbb{R}$ et pour laquelle les voisinages de $-\infty$ (resp. $+\infty$) sont les parties contenant $[-\infty, \alpha[$ (resp. $]\alpha, +\infty]$) pour un $\alpha \in \mathbb{R}$.

Remarque

(a) La distance d'un espace métrique est continue (découle de : $|d(x,y)-d(y,z)| \leq d(x,z)$).

(b) Soient $A \subseteq X$ et $B \subseteq Y$, $f\colon X \to Y$ telle que $f(A) \subseteq B$, et $a \in A$.

Si f est continue en a, alors la restriction $f|_{A,B}\colon A \to B$ qui envoie $x \in A$ sur $f(x) \in B$ est continue en a. La réciproque est vraie lorsque A est un voisinage de a dans X.

(c) Soit $(x_0, y_0) \in X \times Y$. Si $u\colon X \times Y \to Z$ est continue en (x_0, y_0), alors l'application $u(\cdot, y_0)\colon X \to Z$ est continue en x_0 et l'application $u(x_0, \cdot)\colon Y \to Z$ est continue en y_0.

(d) Soit $x_0 \in X$. Une application $\begin{array}{rl} v\colon X \to & Y \times Z \\ x \mapsto & (v_1(x), v_2(x)) \end{array}$ est continue en x_0 si et seulement si les applications $v_1\colon X \to Y$ et $v_2\colon X \to Z$ sont continues en x_0.

(e) Soit $(k,l) \in Y \times Z$. Une suite $\big((v_n, w_n)\big)_{n \geq 0}$ d'éléments de $Y \times Z$ a pour limite (k,l) si et seulement si la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ a pour limite k et la suite $(w_n)_{n \geq 0}$ a pour limite l.

Proposition

(a) Une application $f\colon X \to Y$ est continue si et seulement si :

$$\forall\, V \text{ ouvert de } Y \quad f^{-1}(V) \text{ est un ouvert de } X.$$

On a une caractérisation analogue en remplaçant « ouvert » par « fermé ».

(b) Si $f\colon X \to Y$ est continue en $a \in X$ et $g\colon Y \to Z$ est continue en $f(a)$, alors l'application $g \circ f\colon X \to Z$ est continue en a.

(c) Si $\big(u_n\big)_{n \geq 0}$ a pour limite b dans Y et $g\colon Y \to Z$ est continue en b, alors $g(u_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} g(b)$.

généralise (b) et (c)

(d) On se donne $A \subseteq X$ et $a \in \overline{A}$, $B \subseteq Y$ et $b \in \overline{B}$, $l \in Z$.

Si $\left|\begin{array}{l} f\colon A \to Y \text{ vérifie } f(A) \subseteq B \text{ et } f(x) \underset{x \to a,\, x \in A}{\longrightarrow} b, \\ g\colon B \to Z \text{ vérifie } g(y) \underset{y \to b,\, y \in B}{\longrightarrow} l \end{array}\right.$ alors $(g \circ f)(x) \underset{x \to a,\, x \in A}{\longrightarrow} l$.

Corollaire

Toute réunion finie de parties de X de la forme

$$\big\{x \in X \mid \alpha_1(x) < a_1, ..., \alpha_p(x) < a_p, \beta_1(x) > b_1, ..., \beta_q(x) > b_q, \gamma_1(x) \neq c_1, ..., \gamma_r(x) \neq c_r\big\}$$

$$\big(\text{resp. } \big\{x \in X \mid \alpha_1(x) \leq a_1, ..., \alpha_p(x) \leq a_p, \beta_1(x) \geq b_1, ..., \beta_q(x) \geq b_q, \gamma_1(x) = c_1, ..., \gamma_r(x) = c_r\big\}\big)$$

avec $\alpha_1, ..., \alpha_p, \beta_1, ..., \beta_q, \gamma_1, ..., \gamma_r\colon X \to \mathbb{R}$ continues et $a_1, ..., a_p, b_1, ..., b_q, c_1, ..., c_r \in \mathbb{R}$ est ouverte (resp. fermée).

Définition-Proposition

(a) On dit qu'une application $f\colon X \to Y$ est *un homéomorphisme* si :

$$f \text{ est bijective, et les applications } f \text{ et } f^{-1} \text{ sont continues.}$$

(b) On dit qu'une application $f\colon E \to F$ est *uniformément continue* si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x, y \in E \quad \big(\, d_E(x,y) < \alpha \implies d_F(f(x), f(y)) < \varepsilon\,\big).$$

Dans ce cas, f est continue.

(c) Soit $k \geq 0$. On dit qu'une application $f\colon E \to F$ est *k-lipschitzienne* si :

$$\forall x, y \in E \quad d_F(f(x), f(y)) \leq k\, d_E(x,y).$$

Dans ce cas, f est uniformément continue.

Définition

Soit E un ensemble muni de deux distances d_1 et d_2. On note $\mathrm{id}_E\colon E \to E$ l'application $x \mapsto x$.

(a) On dit que d_1 et d_2 sont *topologiquement équivalentes* si :
id_E est continue de (E, d_1) dans (E, d_2) et de (E, d_2) dans (E, d_1).
(Cela signifie que d_1 et d_2 définissent la même topologie sur E.)

(b) On dit que d_1 et d_2 sont *uniformément équivalentes* si :
id_E est uniformément continue de (E, d_1) dans (E, d_2) et de (E, d_2) dans (E, d_1).

(c) On dit que d_1 et d_2 sont *Lipschitz-équivalentes* si :
id_E est lipschitzienne de (E, d_1) dans (E, d_2) et de (E, d_2) dans (E, d_1).