II. Suites et applications continues

Exercices supplémentaires

1) Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques.
On considère une application $f\colon X \to Y$ et des fermés F_1, ..., F_n de X $(n \geq 1)$ tels que :
$X = F_1 \cup \cdots \cup F_n$ et les restrictions $f_{\upharpoonright F_1}\colon \begin{array}{rcl} F_1 & \to & Y \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$, ..., $f_{\upharpoonright F_n}\colon \begin{array}{rcl} F_n & \to & Y \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$ sont continues.
Démontrer que f est continue.

2) Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. On dit qu'un élément x_0 de X est *un point isolé de* X s'il existe $r > 0$ tel que la boule ouverte de centre x_0 et de rayon r est égale à $\{x_0\}$.
   a) On considère une application $f\colon X \to Y$ et un point isolé x_0 de X.
   Démontrer que f est continue en x_0.
   b) Soit $x_0 \in X$ tel que pour tout espace métrique (Z, d_Z) et toute application $f\colon X \to Z$, l'application f est continue en x_0.
   Démontrer que x_0 est un point isolé de X.

3) On définit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ en posant $f(x,y) = \arctan\left|\frac{y}{x}\right|$ si $x \neq 0$ et $f(x,y) = \frac{\pi}{2}$ si $x = 0$.
On admettra que $f(x,y) = \frac{\pi}{2} - \arctan|\frac{x}{y}|$ quand $y \neq 0$. $^{(*)}$
   a) Montrer que $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$ et $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\}$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
   b) Démontrer que f est continue.
   c) Existe-t-il une application continue $\widetilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dont la restriction à $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est f ?

4) On munit $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$ de la distance usuelle issue de la distance usuelle sur $\mathbb{R}$.
   a) Démontrer que toute bijection $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ est continue.
   b) Existe-t-il une bijection continue $\psi\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$?

5) On note $U := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \mathrm{e}^x \neq y\}$.
Démontrer que l'application $f\colon \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & \left(x^2 \sin y, \frac{1}{\mathrm{e}^x - y}\right) \end{array}$ est continue.

6) On considère l'application $g\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \mapsto \mathbb{R}$ définie par :
$$g(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{s'il existe } r \in \mathbb{Q} \text{ tel que } y = rx \\ 2 & \text{sinon} \end{cases}.$$
Démontrer que g n'a pas de prolongement continu en $(0,0)$.

Suites

1) Soit $d_0 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ l'application définie par
$$\forall x, y \in \mathbb{R} \qquad d_0(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = y \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}.$$
On a vu en TD que d_0 est une distance sur $\mathbb{R}$.
La suite $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \geq 0}$ a-t-elle une limite l dans $\mathbb{R}$ au sens de d_0 lorsque $n \to +\infty$?

$(*)$ On pose $t = |\frac{x}{y}|$. Si $x = 0$: $t = 0$ donc $f(x,y) = \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \arctan t$.
Si $x \neq 0$: $\frac{1}{t} = \frac{1}{\tan(\arctan t)} = \tan(\underbrace{\tfrac{\pi}{2} - \arctan t}_{\in]0, \frac{\pi}{2}[})$ donc $f(x,y) = \arctan \frac{1}{t} = \frac{\pi}{2} - \arctan t$, puis $f(x,y) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left|\frac{x}{y}\right|$

2) Démontrer que la distance $d_u\colon (f,g)\mapsto \min(\|f-g\|_\infty,1)$ où $\|f-g\|_\infty := \sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)-g(x)|$, sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, est telle qu'une suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ converge vers f au sens de d_u si et seulement si elle converge uniformément vers f.

3) a) Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de points d'un espace métrique E. Démontrer que les valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\geq 0}$ sont les limites de ses suites extraites convergentes.

b) Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1}-u_n)=0$.
Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de cette suite est un intervalle.

4) Soit f une application d'une partie A d'un espace métrique E dans un espace métrique F.

a) Soient $a\in\overline{A}$ et $l\in F$. Montrer que $\lim\limits_{x\to a,\, x\in A} f(x)=l$ si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de A qui converge dans E vers a, la suite $(f(x_n))_{n\geq 0}$ converge vers l.

b) On suppose f définie sur E. Montrer que f est continue si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\geq 0}$ convergente d'éléments de E, la suite $(f(x_n))_{n\geq 0}$ converge dans F.

5) Dans les espaces métriques $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^3$ munis de leur distance usuelle, déterminer l'intérieur, l'adhérence et la frontière de chacun des sous-ensembles suivants :

$$A=\bigcup_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}\left\{\tfrac{1}{n}\right\} \quad \text{et} \quad B=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z-x^2\geq 0, y>x\}.$$

6) Soient f et g deux applications d'un espace métrique E dans un espace métrique F.
On suppose que f et g sont continues et coïncident sur une partie dense D de E.
Montrer qu'elles sont égales.

7) Pour tous $m\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, $x_1,\dots,x_m\in\mathbb{R}$, $f\in\mathbb{R}^\mathbb{R}$ et $r_1,\dots,r_m\in]0,+\infty[$, on note :

$$B_{x_1,\dots,x_m}(f,(r_1,\dots,r_m))=\left\{g\in\mathbb{R}^\mathbb{R} \mid |g(x_1)-f(x_1)|<r_1 \text{ et } \dots \text{ et } |g(x_m)-f(x_m)|<r_m\right\}.$$

On admet que l'ensemble des réunions de familles de parties de $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ qui sont de la forme $B_{x_1,\dots,x_m}(f,(r_1,\dots,r_m))$ est une topologie sur $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ (« topologie produit »).

a) Montrer qu'une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers f pour cette topologie si et seulement si elle converge simplement vers f.

b) On note A l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ nulles en dehors d'un ensemble fini.
Montrer que la fonction 1 est dans $\overline{A}$ sans être limite d'une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de A.

Continuité

8) Montrer directement la continuité (pour les topologies usuelles) des applications suivantes :

$$f_1\colon \begin{array}{rcl}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R};\\ (x,y) & \mapsto & x\end{array} \qquad f_2\colon \begin{array}{rcl}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R};\\ (x,y) & \mapsto & x+y\end{array} \qquad f_3\colon \begin{array}{rcl}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R};\\ (x,y) & \mapsto & xy\end{array} \qquad f_4\colon \begin{array}{rcl}\mathbb{R}\times\mathbb{R}\setminus\{0\} & \to & \mathbb{R}.\\ (x,y) & \mapsto & \frac{x}{y}\end{array}$$

9) Soit $(E,+,\cdot)$ un espace vectoriel complexe et $\|\cdot\|: E\to\mathbb{R}_+$ une norme sur E.
En TD, nous avons vu que $d(x,y)=\|x-y\|$, $(x,y\in E)$ définit une distance sur E.
Démontrer que la somme et la multiplication par un scalaire sont continues, c'est-à-dire que :

$$\begin{array}{rcl}E\times E & \to & E\\ (x,y) & \mapsto & x+y\end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl}\mathbb{C}\times E & \to & E\\ (\lambda,x) & \mapsto & \lambda x\end{array}$$

sont continues. ($\mathbb{C}$ est muni de sa distance usuelle $d(z,z')=|z-z'|$, $z,z'\in\mathbb{C}$).

10) L'application $f\colon \begin{array}{rcl}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y) & \longmapsto & \left\{\begin{array}{l} 1 \text{ si } x+y\geq 0\\ \text{ou}\\ 0 \text{ si } x+y<0\end{array}\right.\end{array}$ est-elle continue ?

11) a) Montrer que $GL(n,\mathbb{R})$ est un ouvert dense de $\mathfrak{M}(n,\mathbb{R})$.

b) On considère l'application $f\colon \begin{array}{rcl}GL_n(\mathbb{R}) & \to & \mathfrak{M}(n,\mathbb{R}).\\ A & \mapsto & A^{-1}\end{array}$

Pour quels $M\in\mathfrak{M}(n,\mathbb{R})$ l'application f a-t-elle une limite quand $A\to M$ avec $A\in GL_n(\mathbb{R})$?

12) On note : $\overrightarrow{AB} = B - A$ pour $A, B \in \mathbb{R}^2$.
On rappelle que trois points M, N, P de $\mathbb{R}^2$ sont alignés si et seulement si $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP})$ est liée.
On note : $\mathscr{A} = \left\{(x_M, y_M, x_N, y_N, x_P, y_P) \in \mathbb{R}^6 \;\middle|\; M=\binom{x_M}{y_M}, N=\binom{x_N}{y_N}, P=\binom{x_P}{y_P} \text{ sont alignés dans } \mathbb{R}^2\right\}$.
On munit $\mathbb{R}^6$ de sa topologie usuelle.
Démontrer que $\mathscr{A}$ est fermée dans $\mathbb{R}^6$.

13) Soit (E, d) un espace métrique. On munit $E \times E$ de la distance produit δ_∞.
a) Démontrer que $d\colon E \times E \to \mathbb{R}^+$ est continue.
b) Soit $A \subseteq E$ non-vide. Pour tout $x \in E$, on pose : $d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$.
Démontrer que l'application $x \mapsto d(x, A)$ est continue de E dans $\mathbb{R}^+$.
c) Vérifier que : $\overline{A} = \{x \in E \mid d(x, A) = 0\}$.
d) Soit $x \in E$. A-t-on : $d(x, \overline{A}) = d(x, A)$?

14) a) Démontrer que $f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \frac{x^2 y}{x^4+y^2} \end{array}$ est continue.
b) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Démontrer que la restriction de f à la demi-droite $D_\theta = \{(r\cos\theta, r\sin\theta)\ ;\ r > 0\}$ admet pour limite 0 lorsque $(x, y) \to (0, 0)$ avec $(x, y) \in D_\theta$.
c) L'application f a-t-elle un prolongement par continuité $\widetilde{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$?

15) On munit $\mathbb{C}^2$ et $\mathbb{C}$ de leur topologie usuelle.
On note $\mathscr{C} = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x^3 = y^2\}$.
On définit $f\colon \begin{array}{ccc} \mathscr{C}\setminus\{(1,1)\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x,y) & \longmapsto & \left\{\begin{array}{ll} \frac{y+1}{x-1} & \text{si } x\neq 1 \\ \text{ou} & \\ -\frac{3}{2} & \text{si } x=1 \text{ (auquel cas } y=-1) \end{array}\right. \end{array}$
On admettra que $f(x, y) = \frac{x^2+x+1}{y-1}$ quand $y \neq 1$.

a) Montrer que $U = \{(x, y) \in \mathscr{C} \mid x \neq 1\}$ et $V = \{(x, y) \in \mathscr{C} \mid y \neq 1\}$ sont des ouverts de $\mathscr{C}\setminus\{(1, 1)\}$.
b) Démontrer que f est continue.
c) Existe-t-il une application continue $\widetilde{f} : \mathscr{C} \to \mathbb{C}$ dont la restriction à $\mathscr{C}\setminus\{(1, 1)\}$ est f ?

16) L'application $h\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \left\{\begin{array}{ll} x^2 & \text{si } |x|\leq|y| \\ \text{ou} & \\ y^2 & \text{si } |x|>|y| \end{array}\right. \end{array}$ est-elle continue ?

17) On munit $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}$ de leur distance usuelle.
On note $p\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ (x,y) & \longmapsto & x \end{array}$
a) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Démontrer que $p(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.
b) Démontrer que $H\colon xy = 1$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$ mais que $p(H)$ n'est pas un fermé de $\mathbb{R}$.

18) On considère l'application $g\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \mapsto \mathbb{R}$ définie par :
$$g(x,y) = \begin{cases} \|(x,y)\|_1 = |x| + |y| & \text{s'il existe } r \in \mathbb{Q} \text{ tel que } y = rx \\ \|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2} & \text{sinon} \end{cases}.$$
Démontrer que g a un prolongement continu en $(0, 0)$.
<u>Indication</u> : on pourra commencer par démontrer que $\|(x, y)\|_2 \leq \|(x, y)\|_1$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Homéomorphisme

19) a) On munit $\mathbb{R}^n$ de sa distance euclidienne usuelle.

Montrer que l'application $u\colon \begin{array}{rcl}\mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ x & \mapsto & \frac{x}{1+\|x\|}\end{array}$ se restreint en un homéomorphisme $v\colon \mathbb{R}^n \to B(0,1)$.

b) Exhiber une distance sur $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ qui induit la topologie de $\mathbb{R}$ et donne comme voisinages de $-\infty$ (resp. $+\infty$) les parties contenant $[-\infty,\alpha[$ (resp. $]\alpha,+\infty]$) pour un $\alpha \in \mathbb{R}$.

20) Montrer que les segments $[0,1]$ et $[-1,1]$ sont homéomorphes.

21) On considère le cercle unité $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$.

a) L'application $f\colon \begin{array}{rcl}[0,2\pi[& \to & S^1 \\ t & \mapsto & (\cos t, \sin t)\end{array}$ est-elle un homéomorphisme ?

b) Même question pour l'application $g\colon \begin{array}{rcl}]0,2\pi[& \to & S^1 \setminus \{(1,0)\}. \\ t & \mapsto & (\cos t, \sin t)\end{array}$

22) Soit $n \in \mathbb{N}$. On note S^n la sphère unité euclidienne de $\mathbb{R}^{n+1}$, $N = (0,...,0,1)$ et $S = (0,...,0,-1)$ ses deux pôles. À chaque $A \in \mathbb{R}^{n+1}$ on associe *l'inversion I_A de pôle A et rapport* 2 définie par : $I_A\colon \begin{array}{rcl}\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{A\} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1}\backslash\{A\} \\ M & \longmapsto & M'\end{array}$ où M' est déterminé par l'égalité $\overrightarrow{AM'} = 2\,\frac{\overrightarrow{AM}}{\|\overrightarrow{AM}\|^2}$.

a) Démontrer que I_N se restreint en une bijection $p_N : S^n\backslash\{N\} \to \mathbb{R}^n \times \{0\}$.

Donner une construction géométrique de l'image M' d'un point M de $\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{N\}$ par p_N.

Indication : vérifier que $I_A \circ I_A = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{A\}}$ et utiliser la caractérisation de S^n reliée à $[N,S]$.

b) Démontrer que p_N est un homéomorphisme (appelé $\underbrace{\textit{projection stéréographique de pôle } N}_{\text{cf. la vidéo http://www.dimensions-math.org/Dim\_CH1.htm}}$).

Continuité uniforme

23) L'application $f\colon x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ de $]0,1]$ dans $\mathbb{R}$ est-elle uniformément continue ?

24) a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application uniformément continue.

Montrer qu'il existe $u \geq 0$ et $v \geq 0$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad |f(x)| \leq u|x| + v$.

b) Soit $a > 0$. L'application $f_a\colon x \in \mathbb{R} \mapsto |x|^a \in \mathbb{R}$ est-elle uniformément continue ?

Distances équivalentes

25) On considère sur $\mathbb{R}^2$ les distances « euclidienne » d_2 et « TGV » d_T.

a) L'application $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ est-elle continue de $(\mathbb{R}^2, d_T)$ dans $(\mathbb{R}^2, d_2)$? de $(\mathbb{R}^2, d_2)$ dans $(\mathbb{R}^2, d_T)$?

b) Soit $a \in \mathbb{R}^2$. Déduire du a) que l'application $x \mapsto d_2(a,x)$ est continue de $(\mathbb{R}^2, d_T)$ dans $\mathbb{R}$.

26) Soit (E,d) un espace métrique. On pose : $\widetilde{d}(x,y) = \min(d(x,y),1)$ pour $x,y \in E$.

a) Montrer que les distances d et $\widetilde{d}$ sont topologiquement équivalentes.

b) Sont-elles toujours Lipschitz-équivalentes ?