

Vecteurs aléatoires : à retenir

On se donne une probabilité \mathbb{P} sur un ensemble Ω (muni d'évènements).

Définition-Proposition

On considère une v. a. $X = (X_1, \dots, X_n)$ à valeurs dans \mathbb{R}^n .

(a) La loi de X (« loi jointe de X_1, \dots, X_n ») est l'unique probabilité \mathbb{P}_X sur \mathbb{R}^n telle que :

$$\mathbb{P}_X([a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]) = \mathbb{P}(a_1 \leq X_1 \leq b_1, \dots, a_n \leq X_n \leq b_n)$$

pour $-\infty \leq a_1 \leq b_1 \leq +\infty, \dots, -\infty \leq a_n \leq b_n \leq +\infty$.
ou « la loi de X est discrète »

(b) On dit que X est discrète s'il existe $D \subseteq \mathbb{R}^n$ finie ou dénombrable telle que $\mathbb{P}_X(D) = 1$.

Pour toute application $(x_1, \dots, x_n) \mapsto p_{x_1, \dots, x_n}$ de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^+ nulle hors d'une partie finie ou dénombrable, la v. a. X est discrète avec $\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = p_{x_1, \dots, x_n}$ pour $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si : $\mathbb{E}(h(X)) = \sum_{\substack{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \\ p_{x_1, \dots, x_n} \neq 0}} h(x_1, \dots, x_n) p_{x_1, \dots, x_n}$ pour toute $h: D \rightarrow \mathbb{R}$ bornée.
discrète ; tel que $p_{x_1, \dots, x_n} \neq 0$; ou pour toute $h: D \rightarrow \mathbb{R}$ positive

Une application $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto p_{x_1, \dots, x_n} \in \mathbb{R}^+$ nulle hors d'une partie finie ou dénombrable est associée à une telle X pour une probabilité \mathbb{P} si et seulement si $\sum_{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n} p_{x_1, \dots, x_n} = 1$.

On appellera « fonction de masse sur \mathbb{R}^n » une telle fonction p .
ou « la loi de X admet pour densité »

(c) On dit que X admet pour densité une application $p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ [mesurable] si :

$$\mathbb{P}(a_1 \leq X_1 \leq b_1, \dots, a_n \leq X_n \leq b_n) = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} p(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

pour $-\infty \leq a_1 \leq b_1 \leq +\infty, \dots, -\infty \leq a_n \leq b_n \leq +\infty$.

Pour toute $p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ [mesurable], la v. a. X admet pour densité p si et seulement si :

$$\mathbb{E}(h(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} h(x_1, \dots, x_n) p(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \text{ pour toute } h \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}).$$

ou pour toute $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ [mesurable] positive

Dans ce cas, on a : $\mathbb{P}(X \in B) = \int \dots \int_B p(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$ pour tout $B \subseteq \mathbb{R}^n$ (choisir $h = \mathbb{1}_B$).
événement

Donc deux telles applications [mesurables] p_0 et p_1 continues en $a \in \mathbb{R}^n$ vérifient $p_0(a) = p_1(a)$.

Une application $p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ [mesurable] est associée à une telle X pour une certaine probabilité \mathbb{P} si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} p(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = 1$.

On appellera « densité de probabilité sur \mathbb{R}^n » une telle fonction p .

Définition-Proposition

On considère une v. a. $X = (X_1, \dots, X_n)$ à valeurs dans \mathbb{R}^n .

(a) On suppose que X est discrète avec une fonction de masse $(x_1, \dots, x_n) \mapsto p_{x_1, \dots, x_n}$.

Les lois de X_1, \dots, X_n , appelées « lois marginales de X », sont discrètes avec :

$$\mathbb{P}(X_i = x) = \sum_{\substack{(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \\ p_{x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n} \neq 0}} p_{x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n} \text{ pour } x \in \mathbb{R} \ (1 \leq i \leq n).$$

(b) On suppose que X a une densité $p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$.

Les lois de X_1, \dots, X_n , appelées « lois marginales de X », ont des densités p_1, \dots, p_n définies par :

$$p_i(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} p(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n \text{ pour } x \in \mathbb{R} \ (1 \leq i \leq n).$$

Définition

On considère deux v. a. r. $X, Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telles que : $\mathbb{E}(X^2) < +\infty$ et $\mathbb{E}(Y^2) < +\infty$.

(a) On a : $|\mathbb{E}(|XY|)| \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2)} \sqrt{\mathbb{E}(Y^2)} < +\infty$ puis $|\mathbb{E}(XY)| \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2)} \sqrt{\mathbb{E}(Y^2)}$.

On définit : $\text{Cov}(X, Y) = \underbrace{\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)}_{\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y)))} \in \mathbb{R}$.
a un moment d'ordre 1

On a donc la formule suivante : $\text{Var}(X + Y) = \text{Var} X + \text{Var} Y + 2 \text{Cov}(X, Y)$.

(b) On dit que X et Y sont non-corrélées si $\text{Cov}(X, Y) = 0$ (par exemple X et Y indépendantes).

Quand $\text{Var}(X) \neq 0$ et $\text{Var}(Y) \neq 0$, le coefficient de corrélation linéaire de X et Y est défini par :

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X) \sigma(Y)} \in [-1, 1].$$

Théorème (« théorème de Fubini »)

(a) On considère une application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ mesurable :

$$\text{On a } \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x, y)| dy \right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x, y)| dx \right) dy \leq +\infty$$

et, quand le réel précédent est fini : $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy \right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx \right) dy$.

(b) On considère une suite d'applications $u_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mesurables : avec $n \geq 0$.

$$\text{On a } \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n(x)| \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |u_n(x)| dx \right) \leq +\infty$$

et, quand le réel précédent est fini : $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} u_n(x) dx \right)$.

(c) On considère une suite double $(u_{p,q})_{p,q \geq 0}$ de nombres complexes.

$$\text{On a } \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{q=0}^{+\infty} |u_{p,q}| \right) = \sum_{q=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} |u_{p,q}| \right) \leq +\infty$$

et, quand le réel précédent est fini : $\sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q} \right) = \sum_{q=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} \right)$.

Théorème (« théorème de changement de variable »)

On considère une partie U de \mathbb{R}^n qui est ouverte et une application $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ de U dans \mathbb{R}^n qui a des dérivées partielles, toutes continues.

(a) Soit $x \in U$. On appelle *matrice jacobienne de φ en x* la matrice $J_\varphi(x) := \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$.

(b) On suppose que φ est injective et $\det J_\varphi(x) \neq 0$ pour tout $x \in U$.

Pour toute fonction continue bornée f de $\varphi(U)$ dans \mathbb{R} , on a :

$$\int_{\varphi(U)} f(y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n = \int_U f(\varphi(x_1, \dots, x_n)) |\det J_\varphi(x_1, \dots, x_n)| dx_1 \dots dx_n$$

penser à $|dy_1|$ quand $n = 1$

« jacobien de φ en (x_1, \dots, x_n) », noté parfois $\frac{D(y_1, \dots, y_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}$

Proposition

On considère une v. a. $X = (X_1, \dots, X_n)$ à valeurs dans \mathbb{R}^n .

(a) On considère des fonctions de masse p_1, \dots, p_n sur \mathbb{R} .

Les v. a. r. X_1, \dots, X_n sont discrètes de fonctions de masse p_1, \dots, p_n et sont indépendantes si et seulement si X est discrète de fonction de masse $p : (x_1, \dots, x_n) \mapsto p_1(x_1) \dots p_n(x_n)$.

(b) On considère des densités de probabilité p_1, \dots, p_n sur \mathbb{R} .

Les v. a. r. X_1, \dots, X_n admettent respectivement les densités p_1, \dots, p_n et sont indépendantes si et seulement si X a pour densité $p : (x_1, \dots, x_n) \mapsto p_1(x_1) \dots p_n(x_n)$.

Proposition

On considère des v. a. r. X et Y .

(a) On suppose que X et Y sont discrètes, et indépendantes.

La v. a. r. $X + Y$ est discrète et : $\mathbb{P}(X + Y = u) = \sum_{x \in \mathbb{R}} \underbrace{\mathbb{P}(X = x) \mathbb{P}(Y = u - x)}_{\text{lire 0 lorsque } \mathbb{P}(X = x) = 0}$ pour $u \in \mathbb{R}$.

(b) On suppose que X et Y ont des densités respectives p et q , et sont indépendantes.

La v. a. r. $X + Y$ a pour densité r avec : $r(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) q(u - x) dx \leq +\infty$ pour tout $u \in \mathbb{R}$.

Définition-Proposition

(a) Soient X et Y deux v. a. r. discrètes, avec $Y \geq 0$ ou $\mathbb{E}(|Y|) < +\infty$.

Lorsque $x \in \mathbb{R}$ et $\mathbb{P}(X = x) \neq 0$, on introduit la « probabilité de $\{Y = y\}$ sachant $\{X = x\}$ » :

$$p_{Y|X=x}(y) = \frac{\mathbb{P}(\{Y=y\} \cap \{X=x\})}{\mathbb{P}(X=x)} \quad \text{pour } y \in \mathbb{R}.$$

Donc : $p_{Y|X=x}$ est une fonction de masse.

On a : $\mathbb{E}(Y) = \sum_{x \in \mathbb{R}} \underbrace{\mathbb{E}(Y|X = x) \mathbb{P}(X = x)}_{\text{lire 0 lorsque } \mathbb{P}(X = x) = 0}$ où $\mathbb{E}(Y|X = x) := \sum_{y \in \mathbb{R}} y p_{Y|X=x}(y)$.

(b) Soit (X, Y) une v. a. à valeurs dans \mathbb{R}^2 qui a une densité $p_{X,Y}$, avec $Y \geq 0$ ou $\mathbb{E}(|Y|) < +\infty$.

Lorsque $x \in \mathbb{R}$ et $p_X(x) \neq 0$, où $p_X(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} p_{X,Y}(x, y) dy$, on pose :

$$p_{Y|X=x}(y) = \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_X(x)} \quad \text{pour } y \in \mathbb{R}$$

Donc : $p_{Y|X=x}$ est une densité de probabilité, appelée « densité conditionnelle de Y sachant $X = x$ ».

de la loi de probabilité sur \mathbb{R} qui envoie un événement A sur $\lim_{h \rightarrow 0^+} \mathbb{P}(Y \in A | x \leq X \leq x + h)$

On a : $\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\mathbb{E}(Y|X = x) p_X(x)}_{\text{lire 0 lorsque } p_X(x) = 0} dx$ où $\mathbb{E}(Y|X = x) := \int_{-\infty}^{+\infty} y p_{Y|X=x}(y) dy$.