

III. COMPACTITÉ

Utilisation des critères de compacité

- 1) a) Montrer que la partie $A := \{\frac{1}{n+1} ; n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ de \mathbb{R} est compacte.
b) Plus généralement, montrer qu'étant donnée une suite convergente $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de limite l dans un espace métrique E , la partie $K := \{x_n ; n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$ de E est compacte.
c) Soit f une application d'un espace métrique E dans un espace métrique F .
Montrer que f est continue si et seulement si $f|_K$ est continue pour tout compact K de E .
- 2) Montrer que la boule unité fermée \tilde{B} de l'espace vectoriel normé $(l^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas compacte.
Indication : trouver une suite $(f_k)_{k \geq 0}$ d'éléments de \tilde{B} telle que $\|f_k - f_l\|_\infty = 1$ quand $k \neq l$

Compacité, continuité et homéomorphismes

- 3) a) Démontrer que les intervalles $]0, 1[$ et $[0, 1]$ ne sont pas homéomorphes.
b) Démontrer que l'intervalle $[0, 1[$ et le cercle unité S^1 de \mathbb{R}^2 ne sont pas homéomorphes.
- 4) On considère les parties suivantes de \mathbb{R}^3 :
$$\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\} \quad \text{et} \quad S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$
Démontrer que \mathcal{C} et S^2 ne sont pas homéomorphes.
- 5) On note \tilde{D} le « disque fermé unité » de \mathbb{R}^2 , d'équation $x^2 + y^2 \leq 1$.
Expliquer en détail pourquoi une bijection continue $h : \tilde{D} \rightarrow \tilde{D}$ est un homéomorphisme. (*)
- 6) Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue telle que $\text{Supp } \varphi := \overline{\{x \in \mathbb{R} \mid \varphi(x) \neq 0\}}$ est compact.
Démontrer que φ est uniformément continue.

Compacité et optimisation

- 7) On note : $S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.
 - a) Démontrer que S^2 est une partie fermée de \mathbb{R}^3 . (**)
 - b) Démontrer que S^2 est une partie bornée de \mathbb{R}^3 .
 - c) Montrer qu'il existe $(x_0, y_0, z_0) \in S^2$ tel que :
$$\frac{e^{x_0+y_0+z_0}}{2+\sin x_0+\cos y_0+\tan^2 z_0} \leq \frac{e^{x+y+z}}{2+\sin x+\cos y+\tan^2 z} \quad \text{pour tout } (x, y, z) \in S^2. (***)$$
- 8) On se place dans la boule unité ouverte $B(0, 1)$ de \mathbb{R}^3 . Soit K un compact de $B(0, 1)$.
Démontrer qu'il existe $r \in]0, 1[$ tel que K est inclus dans la boule fermée $B_f(0, r)$.

(*) On peut aussi démontrer, mais c'est un résultat difficile, que toute bijection continue du disque unité ouvert D de \mathbb{R}^2 sur lui-même est un homéomorphisme (cela découle d'une version du « théorème d'invariance du domaine »).

(**) On sait que les normes sur \mathbb{R}^3 sont équivalentes, donc les parties fermées (respectivement bornées) de \mathbb{R}^3 sont les mêmes pour toutes les normes. Le choix de la norme n'a donc pas besoin d'être précisé dans l'énoncé.

(***) On peut considérer les quotients proposés car, pour tout $(x, y, z) \in S^2$ on a :
 $\|(x, y, z)\|_2 \leq 1 \leq \frac{\pi}{2}$ et donc $\tan z \in \mathbb{R}$ et $2 + \sin x + \cos y + \tan^2 z \geq 2 - 1 + 0 + 0 > 0$.

9) On note S^2 la sphère euclidienne de \mathbb{R}^3 , d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Démontrer qu'il existe un tétraèdre $ABCD$ avec $A, B, C, D \in S^2$ qui est de volume maximal.

Indication : le volume V d'un tétraèdre $ABCD$ dans \mathbb{R}^3 s'écrit $V = \frac{1}{6} |\det(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})|$.

[$V = bh/3$ où b est la demi-aire du parallélogramme construit sur (\vec{AB}, \vec{AC}) et $h = d(D, (ABC))$]

10) On note : $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z^2 \text{ et } z = \cos(xy)\}$.

Montrer qu'il existe $(x, y, z) \in \Sigma$ pour lequel z est minimal.

11) On fixe une norme $\|\cdot\|$ sur \mathbb{R}^2 et se donne $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ deux à deux distincts.

On pose : $\varphi(M) = \|M - A\| + \|M - B\| + \|M - C\|$ pour tout $M \in \mathbb{R}^2$.

Démontrer que cette application $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a une plus petite valeur.

Indication : on pourra remarquer que, si $M \in \mathbb{R}^2$ et $\varphi(M) \leq \varphi(A)$, alors $\|M - A\| \leq \varphi(A)$ (ce qui signifie que M appartient à la boule fermée de centre A et de rayon $\varphi(A)$).