# III. Compacité

### Utilisation des critères de compacité

1) a) Montrer que la partie $A := \left\{ \frac{1}{n+1} \; ; \; n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}$ de $\mathbb{R}$ est compacte.

b) Plus généralement, montrer qu'étant donnée une suite convergente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite $l$ dans un espace métrique $E$, la partie $K := \{x_n \; ; \; n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$ de $E$ est compacte.

c) Soit $f$ une application d'un espace métrique $E$ dans un espace métrique $F$.
Montrer que $f$ est continue si et seulement si $f_{|K}$ est continue pour tout compact $K$ de $E$.

2) Montrer que la boule unité fermée $\widetilde{B}$ de l'espace vectoriel normé $(l^\infty, \| \; \|_\infty)$ n'est pas compacte.
*Indication* : trouver une suite $(f_k)_{k\geq 0}$ d'éléments de $\widetilde{B}$ telle que $\|f_k - f_l\|_\infty = 1$ quand $k \neq l$

### Compacité, continuité et homéomorphismes

3) a) Démontrer que les intervalles $]0,1[$ et $[0,1]$ ne sont pas homéomorphes.

b) Démontrer que l'intervalle $[0,1[$ et le cercle unité $S^1$ de $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.

4) On considère les parties suivantes de $\mathbb{R}^3$ :

$$\mathscr{C} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\} \quad \text{et} \quad S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

Démontrer que $\mathscr{C}$ et $S^2$ ne sont pas homéomorphes.

5) On note $\widetilde{D}$ le « disque fermé unité » de $\mathbb{R}^2$, d'équation $x^2 + y^2 \leq 1$.
Expliquer en détail pourquoi une bijection continue $h : \widetilde{D} \to \widetilde{D}$ est un homéomorphisme. $^{(*)}$

6) Soit $\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue telle que $\operatorname{Supp}\varphi := \overline{\{x \in \mathbb{R} \mid \varphi(x) \neq 0\}}$ est compact.
Démontrer que $\varphi$ est uniformément continue.

### Compacité et optimisation

7) On note : $S^2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

a) Démontrer que $S^2$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^3$. $^{(**)}$

b) Démontrer que $S^2$ est une partie bornée de $\mathbb{R}^3$.

c) Montrer qu'il existe $(x_0, y_0, z_0) \in S^2$ tel que :

$$\frac{\mathrm{e}^{x_0+y_0+z_0}}{2+\sin x_0+\cos y_0+\tan^2 z_0} \leq \frac{\mathrm{e}^{x+y+z}}{2+\sin x+\cos y+\tan^2 z} \quad \text{pour tout } (x,y,z) \in S^2. \quad ^{(***)}$$

8) On se place dans la boule unité ouverte $B(0,1)$ de $\mathbb{R}^3$. Soit $K$ un compact de $B(0,1)$.
Démontrer qu'il existe $r \in\, ]0,1[$ tel que $K$ est inclus dans la boule fermée $B_f(0,r)$.

---

$(*)$ On peut aussi démontrer, mais c'est un résultat difficile, que tout bijection continue du disque unité ouvert $D$ de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même est un homéomorphisme (cela découle d'une version du « théorème d'invariance du domaine »).

$(**)$ On sait que les normes sur $\mathbb{R}^3$ sont équivalentes, donc les parties fermées (respectivement bornées) de $\mathbb{R}^3$ sont les mêmes pour toutes les normes. Le choix de la norme n'a donc pas besoin d'être précisé dans l'énoncé.

$(***)$ On peut considérer les quotients proposés car, pour tout $(x,y,z) \in S^2$ on a :
$\|(x,y,z)\|_2 \leq 1 \leq \frac{\pi}{2}$ et donc $\tan z \in \mathbb{R}$ et $2 + \sin x + \cos y + \tan^2 z \geq 2 - 1 + 0 + 0 > 0$.

9) On note $S^2$ la sphère euclidienne de $\mathbb{R}^3$, d'équation $x^2+y^2+z^2=1$.
Démontrer qu'il existe un tétraèdre $ABCD$ avec $A,B,C,D \in S^2$ qui est de volume maximal.
*Indication* : le volume $V$ d'un tétraèdre $ABCD$ dans $\mathbb{R}^3$ s'écrit $V = \frac{1}{6}\,|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})|$.
$\big[V = bh/3$ où $b$ est la demi-aire du parallélogramme construit sur $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et $h = d(D,(ABC))\big]$

10) On note : $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq z^2 \text{ et } z = \cos(xy)\}$.
Montrer qu'il existe $(x,y,z) \in \Sigma$ pour lequel $z$ est minimal.

11) On fixe une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^2$ et se donne $A,B,C \in \mathbb{R}^2$ deux à deux distincts.
On pose : $\varphi(M) = \|M-A\| + \|M-B\| + \|M-C\|$ pour tout $M \in \mathbb{R}^2$.
Démontrer que cette application $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a une plus petite valeur.
*Indication :* on pourra remarquer que, si $M \in \mathbb{R}^2$ et $\varphi(M) \leq \varphi(A)$, alors $\|M-A\| \leq \varphi(A)$ (ce qui signifie que $M$ appartient à la boule fermée de centre $A$ et de rayon $\varphi(A)$.

### Exercices supplémentaires

12) Démontrer que l'application périodique $g\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\sin x}{2+\cos x} \end{array}$ est uniformément continue.

13) Soit $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(\pi)=0$. On définit $g\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [0,\pi], \\ \sin(x) & \text{si } x > \pi. \end{cases}$$

a) Démontrer que la fonction $g$ est continue.

b) La fonction $g$ est-elle uniformément continue ? Justifier.

14) a) Démontrer que la sphère $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + ... + x_{n+1}^2 = 1\}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ est compacte.

b) Démontrer que la partie $SO(n)$ de $\mathfrak{M}(n,\mathbb{R})$ formée des matrices carrées d'ordre $n$ qui sont orthogonales et de déterminant 1 (appelée « groupe spécial orthogonal ») est compacte.

c) Soient $M_1$, ..., $M_p$ des points de $\mathbb{R}^3$.
Montrer qu'il existe une base orthonormée $\mathscr{B} = (u,v,w)$ de $\mathbb{R}^3$ qui rend minimal le volume du plus petit parallélépipède rectangle $\Pi_{\mathscr{B}}$ d'arêtes parallèles à $u,v,w$ contenant $M_1$, ..., $M_p$.

15) Soient $A$ et $B$ deux parties de $\mathbb{R}^N$.
On définit $A+B := \{a+b\,;\ a \in A \text{ et } b \in B\}$.

a) Montrer que si $A$ et $B$ sont compactes, alors la partie $A+B$ de $E$ est compacte.
À titre d'exemple, décrire précisément la partie $S^1+S^1$ de $\mathbb{R}^2$.

b) Montrer que si $A$ est compacte et $B$ est fermée, alors la partie $A+B$ de $E$ est fermée.
Lorsque $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}$ et $B = \mathbb{Z}$, peut-on remplacer « $A$ est compacte » par « $A$ est fermée » ?

16) Soit $f$ une application d'un espace métrique $E$ dans un espace métrique $F$.

a) On suppose que $F$ est compact.
Montrer que : $f$ est continue si et seulement si son graphe $\Gamma$ est fermé dans $E \times F$.
*Indication pour* ($\Leftarrow$) : on suppose que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$ dans $E$ mais $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} f(x)$ dans $F$ et construit une suite convergente $\big(f(x_{n_k})\big)_{k\geq 0}$ dont les termes sont hors d'une boule $B(f(x),\varepsilon)$.

b) On suppose que $E$ est compact.
Déduire du (a) que : $f$ est continue si et seulement si son graphe $\Gamma$ est compact.