

Fonctions caractéristiques : à retenir

On se donne une probabilité \mathbb{P} sur un ensemble Ω (muni d'évènements) et $n \in \mathbb{N}$.

Définition-Proposition

(a) Soit X une v. a. r. sur Ω .

La loi de X est déterminée par sa *fonction caractéristique* $\Phi_X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$\Phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) \text{ pour } t \in \mathbb{R}.$$

(b) Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ une v. a. sur Ω à valeurs dans \mathbb{R}^n .

La loi de X est déterminée par sa *fonction caractéristique* $\Phi_X: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$\Phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{i(t_1 X_1 + \dots + t_n X_n)}) \text{ pour } t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n.$$

De plus les v. a. r. X_1, \dots, X_n sont indépendantes si et seulement si

$$\Phi_{(X_1, \dots, X_n)}(t_1, \dots, t_n) = \Phi_{X_1}(t_1) \cdots \Phi_{X_n}(t_n) \text{ pour tout } (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n. (*)$$

Exemples

Lorsque $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ avec $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$, on a :

$$\Phi_X(t) = e^{imt} e^{-\frac{\sigma^2}{2}t^2} \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

D'autres cas ($t \in \mathbb{R}$) :

- Si $X \sim \mathcal{B}(p)$ avec $p \in [0, 1]$, alors $\Phi_X(t) = 1 - p + pe^{it}$.
- Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $p \in [0, 1]$, alors $\Phi_X(t) = (1 - p + pe^{it})^n$.
- Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$, alors $\Phi_X(t) = \exp(\lambda(e^{it} - 1))$.
- Si $X \sim \mathcal{G}(p)$ (resp. $\mathcal{G}(p)_{\mathbb{N} \setminus \{0\}}$) avec $p \in]0, 1[$, alors $\Phi_X(t) = \frac{p}{1 - (1-p)e^{it}}$ (resp. $\frac{pe^{it}}{1 - (1-p)e^{it}}$).
- Si $X \sim \mathcal{U}_{[-a, a]}$ avec $a > 0$, alors $\Phi_X(t) = \frac{\sin(at)}{at}$.
- Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$, alors $\Phi_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$.
- Si $X \sim \Gamma(r, \lambda)$ avec $r > 0$ et $\lambda > 0$, alors $\Phi_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^r. (**)$

Proposition

(a) Soit X une v. a. r. sur Ω .

La fonction Φ_X est continue et bornée avec $\Phi_X(0) = 1$ et $|\Phi_X| \leq 1$.

On a : $\left\{ \begin{array}{l} \text{si } \mathbb{E}(|X|) < +\infty, \text{ alors } \Phi_X \text{ est } C^1 \text{ et } \Phi'_X(0) = i\mathbb{E}(X); \\ \text{si } \mathbb{E}(X^2) < +\infty, \text{ alors } \Phi_X \text{ est } C^2 \text{ et } \Phi''_X(0) = -\mathbb{E}(X^2) \end{array} \right.$

et plus généralement, si $n \in \mathbb{N}$ et $\mathbb{E}(|X|^n) < +\infty$, alors Φ_X est C^n et $\Phi_X^{(n)}(t) = \mathbb{E}(i^n X^n e^{itX})$.

(Noter que la connaissance du développement limité de Φ_X en 0 permet ainsi de calculer $\mathbb{E}(X^n)$.)

(b) Soient X et Y deux v. a. sur Ω à valeurs dans \mathbb{R}^n .

Quand X et Y sont indépendantes, on a : $\Phi_{X+Y}(t) = \Phi_X(t) \Phi_Y(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^n$.

Proposition (« formule d'inversion de Levy »)

Soit X une v. a. r. sur Ω .

Si $\int_{\mathbb{R}} |\Phi_X(t)| dt < +\infty$, alors X admet pour densité la fonction p_X définie par :

$$p_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \Phi_X(t) dt \text{ pour } x \in \mathbb{R}.$$

(*) Les fonctions $\Phi_{X_1}, \dots, \Phi_{X_n}$ se déduisent de Φ_X par : $\Phi_{X_k}(t_k) = \Phi_X(0, \dots, 0, \underbrace{t_k}_{\text{au } k^{\text{e}} \text{ emplacement}}, 0, \dots, 0)$.

(**) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. On pose : $\text{Log}_{\mathbb{P}}(z) := \ln r + i\theta$ où z se décompose en $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in]-\pi, \pi[$. Cela permet de définir ici $z^\alpha := \exp(\alpha \text{Log}_{\mathbb{P}}(z))$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, en particulier pour $\alpha = r$.