IV. Espaces métriques complets

Espaces métriques complets

1) On admet que pour toute application injective $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la formule $\delta(x,y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|$ détermine une distance δ sur $\mathbb{R}$.

   a) L'espace métrique $(\mathbb{R}, \delta)$ est-il complet quand $\varphi(x) = \mathrm{e}^x$ pour $x \in \mathbb{R}$?

   b) Démontrer que $(\mathbb{R}, \delta)$ est complet si et seulement si $\varphi(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathbb{R}$ (distance usuelle).

2) L'application $\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{R}\setminus\{0\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$ est-elle uniformément continue ?

   Indication : on pourra considérer la suite $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\geq 0}$ et son image par f.

Théorème du point fixe

3) Déterminer celles des applications suivantes qui sont contractantes, celles qui ont un point fixe :

$$\begin{array}{rccl} f_1\colon &]0,1] & \to &]0,1] \\ & x & \mapsto & \frac{x}{2} \end{array};\qquad \begin{array}{rccl} f_2\colon & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{x}{2}+1 \end{array};\qquad \begin{array}{rccl} f_3\colon & [1,2] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{x+2}{x+1} \end{array};\qquad \begin{array}{rccl} f_4\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sqrt{1+x^2} \end{array}.$$

4) Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\forall x \in [0,+\infty[\qquad f(x) = 1 + \tfrac{1}{3}(x + \ln(1+x)).$$

   Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ est convergente.

5) Soit $N\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application k-contractante.

   a) Démontrer que l'application $A := \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} - N$ est bijective.

   Indication : fixer $y \in \mathbb{R}^n$ et utiliser l'application $N_y\colon x \mapsto N(x) + y$.

   b) Démontrer que l'application A^{-1} est $\frac{1}{1-k}$-lipschitzienne.

Espaces de Banach

6) On munit $\mathbb{R}[X]$ de la norme infini sur $[0,1]$: $\|P\|_{L^\infty([0,1])} = \sup\limits_{x\in[0,1]} |P(x)|$ pour $P \in \mathbb{R}[X]$.

   a) Soit $n \in \mathbb{N}$. L'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ muni de $\| \ \|_{L^\infty([0,1])}$ est-il un espace de Banach ?

   b) L'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ muni de $\| \ \|_{L^\infty([0,1])}$ est-il un espace de Banach ?

7) a) Soient A un ensemble et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Démontrer que l'espace vectoriel $(\mathbb{K}^A)_b$ des applications bornées de A dans $\mathbb{K}$, muni de $\| \ \|_\infty$, est un espace de Banach.

   b) On note : $c_0 := \left\{(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\right\} \subseteq l^\infty$.

   Démontrer que c_0, muni $\| \ \|_\infty$, est un espace de Banach.

   c) Soit X un espace topologique. Démontrer que l'espace vectoriel $\mathscr{C}_b(X, \mathbb{C})$ formé des applications continues bornées de X dans $\mathbb{C}$, muni de $\| \ \|_\infty$, est un espace de Banach.

   d) Soit $r \in]0,1[$. On considère $\begin{array}{rccl} f\colon & \mathscr{C}([-r,r],\mathbb{R}) & \to & \mathscr{C}([-r,r],\mathbb{R}) \\ & \varphi & \mapsto & \psi \end{array}$ où $\begin{array}{rccl} \psi\colon & [-r,r] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \int_0^x \varphi(t)\mathrm{d}t + 1 \end{array}$.

   Déduire du théorème du point fixe que f admet un unique point fixe.

   Déterminer ce point fixe par un calcul direct.

8) On note $\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel formé des applications de classe C^1 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

a) Le sous-espace vectoriel $\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ de $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ est-il un espace de Banach pour $\| \ \|_\infty$?

b) On pose : $\|f\| := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ pour $f \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$.
Démontrer que $\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ muni de $\| \ \|$ est un espace de Banach.

Séries absolument convergentes

9) Soient $n_0 \geq 1$ et $A, B \in \mathfrak{M}(n_0, \mathbb{C})$. On admet que $\mathfrak{M}(n_0,\mathbb{C})$ peut être muni de la norme $||| \ |||$ suivante, appelé *norme subordonnée à la norme euclidienne* :

$$|||A||| = \sup_{X \in \mathbb{C}^{n_0} \setminus \{0\}} \frac{||AX||_2}{||X||_2}.$$

a) Montrer que si $A, B \in \mathfrak{M}(n_0,\mathbb{C})$ alors : $|||AB||| \leq |||A|||\,|||B|||$.

b) Démontrer que la série $(\sum \frac{A^n}{n!})_{n\geq 0}$ converge dans $\mathfrak{M}(n_0,\mathbb{C})$.

c) On pose : $\exp A = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$. Démontrer que : $\det(\exp A) = \mathrm{e}^{\operatorname{tr} A}$.

d) On suppose que $BA = AB$. Vérifier que : $\exp(A+B) = \exp A \exp B$.
Indication : remarquer que $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(A+B)^k}{k!} = \sum\limits_{0\leq i+j\leq n} \frac{A^i B^j}{i!j!}$ pour tout $n \geq 0$.