Espaces métriques complets : à retenir (J-Y D)

On considère deux espaces métriques E et F.

Définition

(a) On dit qu'une suite $\left(u_n\right)_{n\geq 0}$ d'éléments de E est *une suite de Cauchy* si :

$$\underbrace{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall p,q \in \mathbb{N} \quad \big(\, p \geq N \text{ et } q \geq N \implies d(u_p, u_q) < \varepsilon \,\big)}_{\text{s'écrit en abrégé : } d(u_p,u_q) \underset{\min(p,q)\to+\infty}{\longrightarrow} 0}.$$

(b) On dit que l'espace métrique E est *complet* si toute suite de Cauchy dans E est convergente.

(c) On dit qu'une application $f\colon E \to F$ est *contractante* si elle est k-lipschitzienne pour un certain $k \geq 0$ qui vérifie $k < 1$.

(d) On dit qu'une application $f\colon E \to F$ est *isométrique* si : $\forall x, y \in E \quad d(f(x), f(y)) = d(x,y)$.

Proposition

(a) Toute partie complète d'un espace métrique est fermée.
Toute partie fermée d'un espace métrique complet est complète.

(b) L'image d'une suite de Cauchy par une application uniformément continue d'un espace métrique dans un autre est une suite de Cauchy.

(c) Un produit de deux espaces métriques non-vides est complet si et seulement si chacun des deux est complet.

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$. L'espace métrique $\mathbb{R}$ est complet, donc l'espace métrique $\mathbb{R}^n$ est complet (pour une distance associée à une norme quelconque) et ses parties complètes sont ses parties fermées.

hors programme

(e) On suppose que E est complet. Pour tout ensemble A, l'ensemble E^A des applications de A dans E est complet pour la distance d_u de la convergence uniforme.$^{(\star)}$

Théorème (« théorème du point fixe »)

On suppose que E est complet non-vide et que $f\colon E \to E$ est contractante.

Alors il existe $l \in E$ unique tel que $f(l) = l$, et pour tout $x_0 \in E$ la suite récurrente $(x_n)_{n\geq 0}$ déterminée par la relation $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers l.$^{(\star\star)}$

Proposition

(a) On suppose que D est une partie dense de E et que F est complet.

Toute application uniformément continue $f\colon D \to F$ a un unique prolongement continu $\tilde{f}\colon E \to F$; de plus $\tilde{f}$ est uniformément continue.

(b) Il existe un espace métrique complet $\widetilde{E}$, appelé *complété de* E, muni d'une application isométrique d'image dense $\tilde{i}\colon E \to \widetilde{E}$. Pour tout autre couple $(\widetilde{\widetilde{E}}, \tilde{\tilde{i}})$ qui convient dans le rôle de $(\widetilde{E}, \tilde{i})$, il existe une bijection isométrique $j\colon \widetilde{E} \to \widetilde{\widetilde{E}}$ telle que $\tilde{\tilde{i}} = j \circ \tilde{i}$.

Proposition

(a) Les suites de Cauchy dans E sont les suites de points de E convergentes dans $\widetilde{E}$.
En particulier toute suite de Cauchy est bornée, et toute suite convergente est de Cauchy.

(b) Tout espace métrique compact est complet (car il est fermé dans son complété).

$(\star)$ On note ici $(E^A)_b$ le fermé de E^A formée des applications dont l'image est bornée. Il est aussi muni de la distance d_∞ définie par $d_\infty(f,g) = \sup\limits_{x\in A} d(f(x), g(x))$. Comme d_∞ est uniformément équivalentes à la distance induite par d_u, l'ensemble $(E^A)_b$ muni de d_∞ est complet quand E est complet.

$(\star\star)$ Quand f est k-contractante on a la majoration suivante de l'erreur commise en approximant l par x_n :
$$d(x_n, l) \leq \tfrac{k^n}{1-k}\, d(x_0, x_1) \qquad \text{pour tout } n \geq 0.$$

On suppose dans la suite que <u>E et F sont des espace vectoriels normés sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$</u>.

Définition

(a) On appelle *espace de Banach* un espace vectoriel normé qui est complet pour la distance associée à sa norme.

(b) On appelle *série d'éléments de E* une suite $(\sum u_n)_{n\geq 0}$ de la forme $\left(u_n, \sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\geq 0}$ où $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite d'éléments de E. Sa convergence équivaut donc à celle de la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\geq 0}$.

(c) La *somme* d'une série convergente $(\sum u_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de E est le vecteur $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ suivant :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

(d) On dit qu'une série $(\sum u_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de$E$ est *normalement convergente* si $\sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\| < +\infty$.

Exemples

(a) Les espaces vectoriels normés l^p avec $p \in [1, +\infty[$ et $\underbrace{l^\infty}_{\text{espace des applications bornées de } \mathbb{N} \text{ dans } \mathbb{C}}$ sont des espaces de Banach.

(b) Soit K un espace topologique compact. L'espace vectoriel $\underbrace{\mathscr{C}(K, \mathbb{R})}_{\text{fermé de l'espace des applications bornées de } K \text{ dans } \mathbb{R}}$ des applications continues de K dans $\mathbb{R}$, muni de la norme de la convergence uniforme, est un espace de Banach.

(c) Si F est un espace de Banach, l'espace vectoriel $\underbrace{\mathscr{L}(E, F)}_{\text{s'identifie à un fermé de l'espace des applications bornées, de la boule unité fermée de } E, \text{ dans } F}$ des applications linéaires continues de E dans F, muni de la norme des applications linéaires, est un espace de Banach.

hors programme

Proposition

(a) On suppose que D est un sous-espace vectoriel dense de E et que F est un espace de Banach. Toute application $f \in \mathscr{L}(D, F)$ a un unique prolongement $\tilde{f} \in \mathscr{L}(E, F)$; de plus $\|\tilde{f}\| = \|f\|$.

(b) Il existe un espace de Banach $\widetilde{E}$, appelé *complété de E*, muni d'une application linéaire isométrique(⋆⋆⋆) d'image dense $\tilde{i} \colon E \to \widetilde{E}$. Pour tout autre couple $(\widehat{E}, \hat{i})$ qui convient dans le rôle de $(\widetilde{E}, \tilde{i})$, il existe une bijection linéaire isométrique $j \colon \widetilde{E} \to \widehat{E}$ telle que $\hat{i} = j \circ \tilde{i}$.

Proposition

(a) Si une série $(\sum u_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de E converge, elle vérifie :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad \left\|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\| \leq +\infty.$$

(b) Toute série absolument convergente d'éléments d'un espace de Banach est convergente.(⋆⋆⋆⋆)

(⋆⋆⋆) Une application linéaire $f \colon E \to F$ est isométrique si et seulement si : $\forall x \in E \quad \|f(x)\| = \|x\|$.

(⋆⋆⋆⋆) Plus précisément, E est un espace de Banach si et seulement si toute série absolument convergente d'éléments de E est convergente.