IV. Espaces métriques complets

Espaces métriques complets

1) On admet que pour toute application injective $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la formule $\delta(x,y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|$ détermine une distance δ sur $\mathbb{R}$.

   a) L'espace métrique $(\mathbb{R}, \delta)$ est-il complet quand $\varphi(x) = \mathrm{e}^x$ pour $x \in \mathbb{R}$?

   b) Démontrer que $(\mathbb{R}, \delta)$ est complet si et seulement si $\varphi(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathbb{R}$ (distance usuelle).

2) Lesquels des espaces métriques suivants sont-ils complets ? Justifier.

   a) $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, avec la distance induite par la norme $\|\cdot\|_2$ de $\mathbb{R}^2$.

   b) $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$, avec la distance induite par la norme $\|\cdot\|_1$ de $\mathbb{R}^3$.

   c) $\mathbb{R}$ avec la distance discrète : $d_0(x,y) = 1$ si $x \neq y$, $d_0(x,y) = 0$ si $x = y$.

3) On note $\mathbb{C}[[X]]$ l'espace vectoriel $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ muni du « produit » $\big((a_n)_{n\geq 0}, (b_n)_{n\geq 0}\big) \mapsto \big(\sum\limits_{p+q=n} a_p b_q\big)_{n\geq 0}$. On dispose sur $\mathbb{C}[[X]]$ de la distance $d\colon (a,b) \mapsto 2^{-v(a-b)}$ déterminée par : $v((a_n)_{n\geq 0}) = \min\{n \in \mathbb{N} \,|\, a_n \neq 0\}$ quand $(a_n)_{n\geq 0} \neq 0$ et $v(0) = +\infty$ (exercice 11 de la feuille I).

   a) Démontrer que le sous-espace vectoriel $\mathbb{C}[X]$ de $\mathbb{C}[[X]]$, égal à $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$, est dense dans $\mathbb{C}[[X]]$.

   Indication : vérifier qu'un $(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ s'écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ (on le notera donc $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$).

   b) Démontrer que $\mathbb{C}[[X]]$ est complet.

4) L'application $f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$ est-elle uniformément continue ?

   Indication : on pourra considérer la suite $(\frac{1}{n+1})_{n\geq 0}$ et son image par f.

Théorème du point fixe

5) Déterminer celles des applications suivantes qui sont contractantes, celles qui ont un point fixe :

$$f_1\colon \begin{array}{ccc}]0,1] & \to &]0,1] \\ x & \mapsto & \frac{x}{2} \end{array} ; \qquad f_2\colon \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x}{2}+1 \end{array} ; \qquad f_3\colon \begin{array}{ccc} [1,2] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x+2}{x+1} \end{array} ; \qquad f_4\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{1+x^2} \end{array} .$$

6) Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\forall x \in [0,+\infty[\qquad f(x) = 1 + \tfrac{1}{3}(x + \ln(1+x)).$$

   Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$ est convergente.

7) Soit $N\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application k-contractante.

   a) Démontrer que l'application $A := \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} - N$ est bijective.

   Indication : fixer $y \in \mathbb{R}^n$ et utiliser l'application $N_y\colon x \mapsto N(x) + y$.

   b) Démontrer que l'application A^{-1} est $\frac{1}{1-k}$-lipschitzienne.

8) Soient D_1, ..., D_k ($k \geq 2$) des droites affines non-parallèles de l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^n$. Pour chaque $i \in \{1, ..., k\}$, on note $p_i \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la projection orthogonale sur D_i.(⋆)

a) Démontrer que l'application $p_1 \circ p_k \circ p_{k-1} \circ \cdots \circ p_2$ est contractante.

b) En déduire qu'il existe $M_1 \in D_1$, ..., $M_k \in D_k$, tels que :

$$p_2(M_1) = M_2,\ ...,\ p_k(M_{k-1}) = M_k, \quad \text{et} \quad p_1(M_k) = M_1.$$

9) Soit $n_0 \geq 1$. On considère une norme $\|\ \|$ sur $\mathbb{R}^{n_0}$ et la norme « subordonnée » $|||\ |||$ sur $\mathfrak{M}(n_0, \mathbb{R})$:

$$|||A||| := \sup_{\substack{X \in \mathbb{R}^{n_0} \\ X \neq 0}} \frac{\|AX\|}{\|X\|} \quad \text{pour} \quad A \in \mathfrak{M}(n_0, \mathbb{R}).$$

Soient $A, N \in \mathfrak{M}(n_0, \mathbb{R})$ tels que $A = I - N$ et $|||N||| < 1$, et $B \in \mathbb{R}^{n_0}$.

On admet que A est inversible. On note $X \in \mathbb{R}^{n_0}$ la solution de $AX = B$.

Soit $X_0 \in \mathbb{R}^{n_0}$. On définit $(X^{(n)})_{n \geq 0}$ par : $X^{(0)} = X_0$ et $X^{(n+1)} = NX^{(n)} + B$ pour $n \geq 0$.

Démontrer que $X^{(n)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} X$ avec $\left\|X^{(n)} - X\right\| \leq \frac{|||N|||^n}{1 - |||N|||} \left\|X^{(1)} - X^{(0)}\right\|$ pour tout $n \geq 0$.

10) Soient (X, d_X) et (Λ, d_Λ) deux espaces métriques. Soit $f \colon X \times \Lambda \to X$ une application continue. On suppose que (X, d_X) est complet et qu'il existe $K \in [0, 1[$ tel que

$$\forall x, y \in X \quad \forall \lambda \in \Lambda \quad d_X(f(x, \lambda), f(y, \lambda)) \leq K\, d_X(x, y).$$

a) Montrer que pour tout $\lambda \in \Lambda$ l'application $x \mapsto f(x, \lambda)$ a un unique point fixe a_λ dans X.

b) Montrer que l'application de Λ dans X définie par $\lambda \mapsto a_\lambda$ est continue.

Indication : on pourra remarquer que

$$d_X(a_\lambda, a_\mu) \leq d_X(f(a_\lambda, \lambda), f(a_\mu, \lambda)) + d_X(f(a_\mu, \lambda), a_\mu) \leq K\, d_X(a_\lambda, a_\mu) + d_X(f(a_\mu, \lambda), a_\mu).$$

Espaces de Banach

11) On munit $\mathbb{R}[X]$ de la norme infini sur $[0, 1]$: $\|P\|_{L^\infty([0,1])} = \sup_{x \in [0,1]} |P(x)|$ pour $P \in \mathbb{R}[X]$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. L'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ muni de $\|\ \|_{L^\infty([0,1])}$ est-il un espace de Banach ?

b) L'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ muni de $\|\ \|_{L^\infty([0,1])}$ est-il un espace de Banach ?

12) On munit $E = \mathscr{C}([0, 1], \mathbb{R})$ de la norme $\|\ \|_1$ définie par : $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\, \mathrm{d}x$ pour $f \in E$.

a) Si $n \geq 2$, on détermine $f_n \colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ par : $f_n|_{[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}]} = 0$, $f_n|_{[\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}]}$ affine, $f_n|_{[\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1]} = 1$. Démontrer que $(f_n)_{n \geq 2}$ est une suite de Cauchy dans $(E, \|\ \|_1)$.

b) On suppose que la suite $(f_n)_{n \geq 2}$ converge dans $(E, \|\ \|_1)$ vers un élément f. Démontrer que $\int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)|\, \mathrm{d}x = 0$ et $\int_{\frac{1}{2}}^1 |f(x) - 1|\, \mathrm{d}x = 0$.

c) En déduire que l'espace vectoriel normé $(E, \|\ \|_1)$ n'est pas un espace de Banach.

13) a) Soient A un ensemble et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Démontrer que l'espace vectoriel $(\mathbb{K}^A)_b$ des applications bornées de A dans $\mathbb{K}$, muni de $\|\ \|_\infty$, est un espace de Banach.

b) On note : $c_0 := \left\{(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid a_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0\right\} \subseteq l^\infty$.
Démontrer que c_0, muni $\|\ \|_\infty$, est un espace de Banach.

c) Soit X un espace topologique. Démontrer que l'espace vectoriel $\mathscr{C}_b(X, \mathbb{C})$ formé des applications continues bornées de X dans $\mathbb{C}$, muni de $\|\ \|_\infty$, est un espace de Banach.

d) Soit $r \in]0, 1[$. On considère $f \colon \begin{array}{ccc} \mathscr{C}([-r, r], \mathbb{R}) & \to & \mathscr{C}([-r, r], \mathbb{R}) \\ \varphi & \mapsto & \psi \end{array}$ où $\psi \colon \begin{array}{ccc} [-r, r] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_0^x \varphi(t)\mathrm{d}t + 1 \end{array}$.

Déduire du théorème du point fixe que f admet un unique point fixe.

Déterminer ce point fixe par un calcul direct.

(⋆) Soient $M, N \in \mathbb{R}^n$. Le point $p_i(M)$ est l'unique $M' \in D_i$ tel que $\overrightarrow{MM'} \perp \overrightarrow{D_i}$. D'où : $\overrightarrow{p_i(M)p_i(N)} = \underbrace{\overrightarrow{p_i}}_{\text{projection de } \mathbb{R}^n \text{ sur } \overrightarrow{D_i} \text{ parallèlement à } \overrightarrow{D_i}^\perp}(\overrightarrow{MN})$.

14) On note $\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel formé des applications de classe C^1 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

a) Le sous-espace vectoriel $\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ de $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ est-il un espace de Banach pour $\| \ \|_\infty$?

b) On pose : $\|f\| := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ pour $f \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$.
Démontrer que $\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ muni de $\| \ \|$ est un espace de Banach.

Complété d'un espace métrique

15) Soit (E,d) un espace métrique. On dit qu'un espace métrique $(\widetilde{E},\tilde{d})$ muni d'une application isométrique $\tilde{\imath} : E \to \widetilde{E}$ est *un complété* de (E,d) si $(\widetilde{E},\tilde{d})$ est complet et $\tilde{\imath}(E)$ est dense dans $\widetilde{E}$.

a) Décrire, par exemple, un complété de l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ muni de $\| \ \|_{L^\infty([0,1])}$.

b) Soit $x_0 \in E$. Pour tous $x, z \in E$, on pose $\varphi_x(z) := d(x,z) - d(x_0,z)$.
Démontrer que les φ_x vérifient : $\varphi_x \in (\mathbb{R}^E)_b$ et $\|\varphi_x - \varphi_y\|_\infty = d(x,y)$ pour $x, y \in E$.
En déduire un complété de (E,d).

c) On suppose donnés deux complétés $(\widetilde{E},\tilde{d})$ et $(\breve{E},\breve{d})$ de E.
Démontrer qu'il existe une bijection isométrique $j\colon \widetilde{E} \to \breve{E}$ telle que $\breve{\imath} = j \circ \tilde{\imath}$.

Séries absolument convergentes

16) Soient $n_0 \geq 1$ et $A, B \in \mathfrak{M}(n_0,\mathbb{C})$. On admet que $\mathfrak{M}(n_0,\mathbb{C})$ peut être muni de la norme $\|| \ \||$ suivante, appelé *norme subordonnée à la norme euclidienne* :

$$\||A\|| = \sup_{X \in \mathbb{C}^{n_0} \setminus \{0\}} \frac{||AX||_2}{||X||_2}.$$

a) Montrer que si $A, B \in \mathfrak{M}(n_0,\mathbb{C})$ alors : $\||AB\|| \leq \||A\|| \, \||B\||$.

b) Démontrer que la série $(\sum \frac{A^n}{n!})_{n \geq 0}$ converge dans $\mathfrak{M}(n_0,\mathbb{C})$.

c) On pose : $\exp A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$. Démontrer que : $\det(\exp A) = \mathrm{e}^{\operatorname{tr} A}$.

d) On suppose que $BA = AB$. Vérifier que : $\exp(A+B) = \exp A \exp B$.
Indication : remarquer que $\sum_{k=0}^{n} \frac{(A+B)^k}{k!} = \sum_{0 \leq i+j \leq n} \frac{A^i B^j}{i!j!}$ pour tout $n \geq 0$.

e) En déduire que pour toute $A \in \mathfrak{M}(n_0,\mathbb{R})$ antisymétrique, on a : $\exp A \in SO(n_0,\mathbb{R})$.