

# Théorèmes limites : à retenir

On se donne une probabilité  $\mathbb{P}$  sur un ensemble  $\Omega$  (muni d'évènements).

## Proposition

Soit  $X$  une v. a. r. sur  $\Omega$  vérifiant  $\mathbb{E}(X^2) < +\infty$ .

On a :  $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \text{Var}(X)$  pour tout  $\varepsilon > 0$  « inégalité de Bienaymé-Tchebychev ».  
 [Cela découle de l'« inégalité de Markov » :  $\mathbb{P}(Z \geq a) \leq \underbrace{\frac{\mathbb{E}(Z)}{a}}_{\leq +\infty}$  pour  $Z$  v. a. r. positive et  $a > 0$ .]

## Définition-Proposition

Soient  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de v. a. r. sur  $\Omega$ , et,  $X$  et  $Y$  deux v. a. r. sur  $\Omega$ .

(a) On dit que la suite  $(X_n)_{n \geq 1}$  converge en probabilité vers  $X$ , et note «  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{P} X$  », si :  

$$\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \text{ pour tout } \varepsilon > 0.$$

De plus, si  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{P} X$  et  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{P} Y$  alors  $\mathbb{P}(X = Y) = 1$  (unicité à l'égalité presque sûre près).

(b) On dit que  $(X_n)_{n \geq 1}$  converge en loi vers  $X$ , et note «  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} X$  », si elle vérifie l'une des trois propriétés équivalentes :

- (i)  $\mathbb{E}(h(X_n)) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \mathbb{E}(h(X))$  pour tout  $h \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  ;
- (ii)  $F_{X_n}(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} F_X(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  en lequel  $F_X$  est continue ;
- (iii)  $\Phi_{X_n}(t) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \Phi_X(t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

D'après (i) : si  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} X$  alors on a  $f(X_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} f(X)$  pour tout  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

(c) Si  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{P} X$ , alors  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} X$ .

## Proposition

Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de v. a. r. indépendantes de même loi (« i. i. d. » pour « indépendantes et identiquement distribuées ») sur  $\Omega$ , telle que  $\mathbb{E}(X_1^2) < +\infty$ .

en fait la condition «  $\mathbb{E}(|X_1|) < +\infty$  » suffit

On a :  $\overline{X}_n := \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{P} \mathbb{E}(X_1)$  « loi faible des grands nombres ».

[Provient de la « convergence en moyenne quadratique » :  $\mathbb{E}((\overline{X}_n - \mathbb{E}(X_1))^2) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ .]  
noté «  $\overline{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^2} \mathbb{E}(X_1)$  »

## Compléments

Soient  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de v. a. r. sur  $\Omega$  et  $X$  une v. a. r. sur  $\Omega$ .

(a) On dit que la suite  $(X_n)_{n \geq 1}$  converge presque sûrement vers  $X$ , et note «  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p. s.} X$  », si :  

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} X(\omega)\}) = 0.$$

(b) Si  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p. s.} X$ , alors  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{P} X$ .

(c) Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de v. a. r. i. i. d. sur  $\Omega$  telle que  $\mathbb{E}(|X_1|) < +\infty$ .

On a :  $\overline{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p. s.} \mathbb{E}(X_1)$  « loi forte des grands nombres ».

(d) Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de v. a. r. i. i. d. sur  $\Omega$  telle que  $\mathbb{E}(X_1^2) < +\infty$ .

On a :  $\widehat{\sigma}_n^2 := \frac{(X_1 - \overline{X}_n)^2 + \dots + (X_n - \overline{X}_n)^2}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p. s.} \text{Var}(X_1)$ .

hors programme

**Proposition** (lemme de Scheffé)

On considère une suite  $(X_n)_{n \geq 1}$  de v. a. r. sur  $\Omega$  et une v. a. r.  $X$  sur  $\Omega$ .

(a) On suppose que les  $X_n$  ( $n \geq 1$ ) et  $X$  sont à valeurs dans  $\mathbb{Z}$ .

On a :  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} X \iff \forall k \in \mathbb{Z} \quad \mathbb{P}(X_n = k) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \mathbb{P}(X = k)$ .

(b) On suppose que les  $X_n$  ( $n \geq 1$ ) et  $X$  ont des densités  $p_n: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$  et  $p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ .

Si  $p_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} p_X(x)$  pour presque tout  $x \in \mathbb{R}$ , alors  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} X$ .

**Théorème**

On note :  $\Pi(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ .

(a) Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de v. a. r. i. i. d. sur  $\Omega$  telle que  $\mathbb{E}(X_1^2) < +\infty$  et  $\sigma(X_1) \neq 0$ .

On pose :  $S_n = X_1 + \dots + X_n$  quand  $n \geq 1$ . On a :

$\underbrace{\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sigma(S_n)}}_{\text{somme réduite}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} X \sim \mathcal{N}(0, 1)$  « théorème central limite ».

Cela signifie que :  $\mathbb{P}\left(a < \underbrace{\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sigma(S_n)}}_{\frac{\bar{X}_n - \mathbb{E}(X_1)}{\sigma(X_1)/\sqrt{n}}} < b\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \underbrace{\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx}_{\Pi(b) - \Pi(a)}$  quand  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$  (\*).

(c) Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de v. a. r. i. i. d. avec  $X_1$  de loi de Bernoulli de paramètre  $p \in ]0, 1[$ .

On pose :  $S_n = X_1 + \dots + X_n$  quand  $n \geq 1$ . On a d'après le théorème central limite :

$\mathbb{P}\left(a < \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < b\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \Pi(b) - \Pi(a)$  quand  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$  « théorème de Moivre-Laplace ».

**Remarque**

Le théorème central limite est valable avec «  $\leq$  » au lieu de «  $<$  » car  $S'_n := \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sigma(S_n)}$  vérifie :

$\underbrace{\mathbb{P}\left(a < S'_n < b\right)}_{\geq \Pi(b) - \Pi(a) - \varepsilon \text{ si } n \geq N} \leq \mathbb{P}\left(a \leq S'_n \leq b\right) \leq \mathbb{P}\left(a - \frac{1}{k} < S'_n < b + \frac{1}{k}\right) \leq \underbrace{\Pi\left(b + \frac{1}{k}\right) - \Pi\left(a - \frac{1}{k}\right) + \frac{\varepsilon}{2}}_{n \geq N_k \leq \Pi(b) - \Pi(a) + \varepsilon \text{ si } k = K \text{ et } n \geq N_k}$

**Une construction admise** (suite de v. a. r. indépendantes avec des lois imposées)

Soient  $U_n$  des v. a. r. sur des ensembles  $\Omega_n$  munis chacun (d'évènements et) d'une probabilité  $\mathbb{P}_n$  sur  $\Omega_n$ , où  $n \geq 1$ . Il existe une probabilité  $\tilde{\mathbb{P}}$  sur l'ensemble  $\Omega_{\mathbb{N}} = \prod_{n \geq 1} \Omega_n$  (muni de certains évènements) et une suite  $(X_n)_{n \geq 1}$  de v. a. r. indépendantes sur  $\Omega_{\mathbb{N}}$  telle que pour tout  $n \geq 1$  la loi de  $X_n$  pour  $\tilde{\mathbb{P}}$  est égale à la loi de  $U_n$  pour  $\mathbb{P}_n$ .

*Exemple* : la probabilité  $\tilde{\mathbb{P}}$  du jeu de pile ou face infini s'obtient avec  $\mathbb{P}_n = \mathcal{B}(p)$  et  $U_n = \text{id}_{\mathbb{R}}$ .

---

(\*) Pour «  $n$  grand », on approxime en pratique  $\mathbb{P}\left(\left|\frac{\bar{X}_n - \mathbb{E}(X_1)}{\sigma(X_1)/\sqrt{n}}\right| < a\right)$  par sa limite  $2\Pi(a) - 1$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , et cet abus fournit un intervalle de la forme  $]\bar{X}_n - \varepsilon_n, \bar{X}_n + \varepsilon_n[$  dans lequel  $\mathbb{E}(X_1)$  se trouve avec une probabilité  $\geq 1 - \alpha$  où  $\alpha$  est déduit de la table des valeurs prises par  $\Pi$ .