

V. CONNEXITÉ (hors programme)

- 1) a) Démontrer que toute partie convexe de \mathbb{R}^n est connexe.
b) Donner un exemple de partie connexe de \mathbb{R}^2 qui n'est pas convexe.
- 2) a) Le complémentaire de S^1 dans \mathbb{R}^2 est-il connexe ?
b) Démontrer que le complémentaire de \mathbb{Q}^2 dans \mathbb{R}^2 est connexe par arcs.
Indication : joindre deux points de $\mathbb{C}_{\mathbb{R}^2} \setminus \mathbb{Q}^2$ avec 2 ou 3 segments horizontaux et verticaux.
- 3) Soient $\arg_1, \arg_2: \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- \rightarrow \mathbb{R}$ continues vérifiant : $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- \quad z = |z| e^{i \arg_1(z)} = |z| e^{i \arg_2(z)}$.
Démontrer qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- \quad \arg_2(z) = \arg_1(z) + 2k\pi$.
- 4) a) Démontrer que S^1 n'est pas homéomorphe au segment $[0, 1]$.
b) Démontrer de même que \mathbb{R}^2 n'est pas homéomorphe à \mathbb{R} .
- 5) a) Démontrer que la sphère S^n est connexe par arcs lorsque $n \neq 0$.
Indication : on pourra faire intervenir la surjection canonique de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ sur S^n .
b) Démontrer que le groupe spécial orthogonal $SO(n)$ est connexe par arcs.
Indication : quand $n \geq 2$, on pourra utiliser des rotations dans certains plans vectoriels de \mathbb{R}^n .
- 6) On considère une partie A d'un espace topologique X .
a) Soit C une partie connexe de X qui rencontre à la fois A et son complémentaire dans X .
Démontrer que C rencontre la frontière de A .
b) Soit γ un chemin joignant un point de A à un point du complémentaire de A dans X .
Démontrer que l'image de γ coupe la frontière de A .
- 7) Soit A une partie connexe d'un espace topologique X .
a) Démontrer que \bar{A} est connexe.
b) La partie $\overset{\circ}{A}$ de X est-elle toujours connexe ?
- 8) Soient X un espace topologique et $a \in X$.
a) Montrer qu'il existe un plus grand connexe (resp. connexe par arcs) de X contenant a .
On l'appelle *la composante connexe de a* (resp. *la composante connexe par arcs de a*).
On le notera C_a (resp. \tilde{C}_a) dans la suite de cette feuille d'exercices.
b) Montrer que les parties $C_x, x \in X$, sont des fermés de X deux à deux disjoints de réunion X .
c) Montrer que, si les composantes connexes (des points) de X sont en nombre fini, alors elles sont aussi ouvertes de X .
d) Quelles sont les composantes connexes (des points) de \mathbb{Q} ? Sont-elles ouvertes dans \mathbb{Q} ?
- 9) Soient X un ouvert de \mathbb{R}^n et $a \in X$.
Démontrer que \tilde{C}_a est ouverte dans \mathbb{R}^n , et en déduire que $\tilde{C}_a = C_a$.

10) On note X l'adhérence dans \mathbb{R}^2 du graphe de $f:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$.

$$x \mapsto \sin \frac{1}{x}$$

a) La partie X de \mathbb{R}^2 est-elle connexe ?

b) Est-elle connexe par arcs ?

c) Les composantes connexes par arcs de X sont-elles fermées dans X ?