

# Espaces topologiques connexes : à retenir (J-Y D)

(à connaître dans le cas des espaces métriques)

On considère un espace topologique  $X$ .

## Définition

(a) On dit que l'espace topologique  $X$  est *connexe* si  $X$  n'est pas réunion de deux ouverts disjoints non-vides.

(b) On appelle *chemin de  $X$  d'origine  $a \in X$  et d'extrémité  $b \in X$*  une application continue  $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$  telle que  $\gamma(0) = a$  et  $\gamma(1) = b$ .

( Quand  $\gamma$  est un chemin de  $X$  joignant  $a$  à  $b$  et  $\delta$  est un chemin de  $X$  joignant  $b$  à  $c$ , leur *composé* )  
 $\gamma\delta: t \mapsto \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \delta(2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases}$  au sens des chemins est un chemin joignant  $a$  à  $c$ . (\*)

(c) On dit que l'espace topologique  $X$  est *connexe par arcs* si pour tous  $a, b \in X$  il existe un chemin de  $X$  qui a pour origine  $a$  et extrémité  $b$ .

## Proposition

(a) L'espace topologique  $X$  est connexe si et seulement si toute application continue de  $X$  dans  $\{0, 1\}$  est constante. A fortiori la réunion de connexes de  $X$  qui ont un point commun est connexe.

(b) L'image d'une application continue d'un espace topologique connexe (resp. connexe par arcs) dans un espace topologique est connexe (resp. connexe par arcs).

(c) Un produit de deux espaces topologiques non-vides est connexe (resp. connexe par arcs) si et seulement si chacun des deux est connexe (resp. connexe par arcs).

## Proposition

(a) Les parties connexes de  $\mathbb{R}$  sont les intervalles.

Par conséquent, une application continue d'un espace topologique connexe dans  $\mathbb{R}$  qui prend des valeurs  $\alpha$  et  $\beta$  prend aussi toutes les valeurs entre  $\alpha$  et  $\beta$  (« théorème des valeurs intermédiaires »).

(b) Tout espace topologique connexe par arcs est connexe.

---

(\*) Pour joindre deux points  $a$  et  $b$  à l'aide d'une succession de chemins, il faudrait préciser comment ces chemins sont regroupés. Lorsque  $\gamma_1$  est un chemin de  $X$  joignant  $a = a_1$  à  $a_2$ ,  $\gamma_2$  est un chemin de  $X$  joignant  $a_2$  à  $a_3$ , et  $\gamma_3$  est un chemin de  $X$  joignant  $a_3$  à  $b = a_4$ , les chemins  $(\gamma_1\gamma_2)\gamma_3$  et  $\gamma_1(\gamma_2\gamma_3)$  sont en général différents.