

Vecteurs gaussiens : à retenir

On se donne une probabilité \mathbb{P} sur un ensemble Ω (muni d'évènements) et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

On note : $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ pour tous $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Définition

Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{R})$ une matrice carrée d'ordre n et Z une v. a. r. sur Ω .

(a) On dit que A est *symétrique* si : $a_{j,i} = a_{i,j}$ pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Dans ce cas, on dit que A est *positive* si : $\langle Ax, x \rangle \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

(b) On dit que Z est *gaussienne* s'il existe $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \geq 0$ tels que $\begin{cases} \sigma = 0 \text{ et } \mathbb{P}(Z = m) = 1 \\ \text{ou} \\ \sigma > 0 \text{ et } Z \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2) \end{cases}$.

Définition-Proposition

Soient $X = (X_1, \dots, X_n)$ et $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ deux v. a. sur Ω à valeurs dans \mathbb{R}^n .

(a) Pour tous $\mu \in \mathbb{R}^n$ et $\Gamma \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{R})$ symétrique positive, il existe une unique loi de probabilité $\mathcal{N}_n(\mu, \Gamma)$ sur \mathbb{R}^n dont la fonction caractéristique Φ vérifie : $\Phi(t) = e^{i\langle \mu, t \rangle} e^{-\frac{1}{2}\langle \Gamma t, t \rangle}$ pour $t \in \mathbb{R}^n$.

Ainsi : $\begin{cases} \text{si } X \sim \mathcal{N}_n(\mu, \Gamma) \text{ et } Y \sim \mathcal{N}_n(\nu, \Delta) \text{ sont indépendantes, alors } X+Y \sim \mathcal{N}_n(\mu+\nu, \Gamma+\Delta); \\ \text{si } X \sim \mathcal{N}_n(\mu, \Gamma) \text{ et } A \in \mathfrak{M}_{k,n}(\mathbb{R}) \text{ et } B \in \mathbb{R}^k, \text{ alors } AX+B \sim \mathcal{N}_k(A\mu+B, A\Gamma A). \end{cases}$

(b) On dit que la v. a. X est *gaussienne* s'il existe un vecteur $\mu \in \mathbb{R}^n$ et une matrice $\Gamma \in \mathfrak{M}(n, \mathbb{R})$ symétrique positive tels que $X \sim \mathcal{N}_n(\mu, \Gamma)$.

Dans ce cas X_1, \dots, X_n ont des moments d'ordre 2 avec :

$$\mu = (\mathbb{E}(X_1), \dots, \mathbb{E}(X_n)) \text{ et } \Gamma = (\text{Cov}(X_i, X_j))_{1 \leq i, j \leq n}.$$

(c) La v. a. X est gaussienne si et seulement si $\sum_{i=1}^n \alpha_i X_i$ est gaussienne pour tous $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.

Définition-Proposition

Soit X une v. a. à valeurs dans \mathbb{R}^n gaussienne d'espérance μ et de matrice de covariance Γ .

(a) On a : $\mathbb{P}(X \in \Gamma(\mathbb{R}^n) + \mu) = 1$.

En particulier, X n'a pas de densité lorsque $\det(\Gamma) = 0$.

(b) On suppose que $\det(\Gamma) \neq 0$.

La loi de X a pour densité la fonction p_X définie par :

$$p_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det(\Gamma)}} e^{-\frac{1}{2}\langle \Gamma^{-1}(x-\mu), x-\mu \rangle} \text{ pour } x \in \mathbb{R}^n.$$

Proposition

Soit $X = (X_1, \dots, X_r, X_{r+1}, \dots, X_n)$ une v. a. à valeurs dans \mathbb{R}^n , avec $1 \leq r < n$.

(a) Si X est gaussienne, alors (X_1, \dots, X_r) et (X_{r+1}, \dots, X_n) sont gaussiennes.

La réciproque est fautive.

(b) Si $(X_1, \dots, X_r) \sim \mathcal{N}_r(\mu', \Gamma')$ et $(X_{r+1}, \dots, X_n) \sim \mathcal{N}_{n-r}(\mu'', \Gamma'')$ sont indépendantes, alors $X \sim \mathcal{N}_n(\mu, \Gamma)$ avec $\mu = (\mu', \mu'')$ et $\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma' & 0 \\ 0 & \Gamma'' \end{pmatrix}$.

(c) Si X est gaussienne avec $\text{Cov}(X_i, X_j) = 0$ quand $1 \leq i \leq r$ et $r+1 \leq j \leq n$, alors (X_1, \dots, X_r) et (X_{r+1}, \dots, X_n) sont indépendantes.