Tribu et mesure : à retenir (J-Y D)

Définition

On considère un ensemble X et une partie $\mathcal{A}$ de $\mathscr{P}(X)$. ← [$\mathscr{P}(X)$ désigne l'ensemble des parties de X]

On dit que $\mathcal{A}$ est une *tribu* sur X (ou que « $(X,\mathcal{A})$ *est un espace mesurable* ») si :

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$;

(ii) $\forall A \in \mathcal{A} \quad A^c \in \mathcal{A}$; ← [A^C désigne le complémentaire de A dans X]

(iii) $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Dans ce cas, les éléments de $\mathcal{A}$ (par exemple X) seront appelées *les parties mesurables de* X.

Définition-Proposition

Soit $(X,\mathcal{A})$ un espace mesurable. On a :

(i) $\forall A,B \in \mathcal{A} \quad A\cup B \in \mathcal{A}$ et $A \cap B \in \mathcal{A}$;

(ii) $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}, \quad \limsup_{n\to+\infty} A_n \in \mathcal{A}$ et $\liminf_{n\to+\infty} A_n \in \mathcal{A}$

où $\quad \limsup_{n\to+\infty} A_n := \{x \in X \mid x \in A_n \text{ pour une infinité de } n \in \mathbb{N}\} = \bigcap_{n\geq 0} \bigcup_{k\geq n} A_k$

et $\quad \liminf_{n\to+\infty} A_n := \{x \in X \mid x \in A_n \text{ pour } n \text{ assez grand}\} = \bigcup_{n\geq 0} \bigcap_{k\geq n} A_k$ $^{(\star)}$.

Définition

On considère un ensemble X et une partie $\mathcal{M}$ de $\mathscr{P}(X)$.

On dit que $\mathcal{M}$ est une *classe monotone dans* X si :

(i) $X \in \mathcal{M}$;

(ii) $\forall A,B \in \mathcal{M} \quad (A \subseteq B \Longrightarrow B\setminus A \in \mathcal{M})$;

(iii) $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}^{\mathbb{N}} \quad \big(\forall n \in \mathbb{N} \quad A_n \subseteq A_{n+1} \Longrightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}\big)$.

Proposition

Soient X un ensemble et $\mathcal{C}$ une partie de $\mathscr{P}(X)$.

(a) Il existe une plus petite tribu sur X contenant $\mathcal{C}$. ← $\Big[\bigcap_{\mathcal{A} \text{ tribu } \supseteq \mathcal{C}} \mathcal{A}\Big]$

On l'appelle *la tribu engendrée par* $\mathcal{C}$, et la note $\sigma(\mathcal{C})$.

(b) Il existe une plus petite classe monotone contenant $\mathcal{C}$. ← $\Big[\bigcap_{\mathcal{M} \text{ classe monotone } \supseteq \mathcal{C}} \mathcal{M}\Big]$

On l'appelle *la classe monotone dans* X *engendrée par* $\mathcal{C}$, et la note $\mathscr{M}(\mathcal{C})$.

Exemple

On se donne un espace topologique X et note $\mathcal{O}$ l'ensemble de ses ouverts.

On appelle *tribu borélienne de* X la tribu $\mathscr{B}(X) := \sigma(\mathcal{O})$.

Les ouverts de $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ sont les réunions de $[-\infty,b[$, $]a,b[$, $]a,+\infty]$, $a,b\in\mathbb{R}$ et $a<b$.

On a : $\mathscr{B}(\mathbb{R}) = \sigma\big(\{]-\infty,a] \ ; \ a\in\mathbb{R}\}\big)$ et $\mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \sigma\big(\{[-\infty,a] \ ; \ a \in \mathbb{R}\}\big)$.

Théorème (« lemme des classes monotones »)

Soient X un ensemble et $\mathcal{F}$ une partie de $\mathscr{P}(X)$ $\underbrace{\text{stable par intersection de deux éléments}}_{\text{c'est-à-dire stable par intersection finie}}$.

Alors : $\boxed{\mathscr{M}(\mathcal{F}) = \sigma(\mathcal{F})}$.

Définition

On se donne des espaces mesurables $(X,\mathcal{A})$ et $(Y,\mathcal{B})$, et une application $f\colon X \to Y$.

On dit que f *est* $(\mathcal{A},\mathcal{B})$*-mesurable* si : $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ pour tout $B \in \mathcal{B}$.

Quand X et Y sont des espaces topologiques, on dira que f *est borélienne* lorsqu'elle est mesurable pour les tribus boréliennes.

$(\star)$ Pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels, on note $\limsup_{n\to+\infty} u_n := \lim_{n\to+\infty} \sup_{k\geq n} u_k$ et $\liminf_{n\to+\infty} u_n := \lim_{n\to+\infty} \inf_{k\geq n} u_k$.

Par conséquent : $\limsup_{n\to+\infty} \mathbb{1}_{A_n}(x) = \mathbb{1}_{\limsup_{n\to+\infty} A_n}(x)$ et $\liminf_{n\to+\infty} \mathbb{1}_{A_n}(x) = \mathbb{1}_{\liminf_{n\to+\infty} A_n}(x)$ pour tout $x \in X$.

Proposition

On se donne des espaces mesurables $(X,\mathcal{A})$, $(Y,\mathcal{B})$ et $(Z,\mathcal{C})$.

(a) Soient $f\colon X\to Y$ et $g\colon Y\to Z$ mesurables. L'application $g\circ f\colon X\to Z$ est mesurable.

(b) Soit $A\subseteq X$. On note $\mathbb{1}_A\colon A\to\mathbb{R}$ la fonction caractéristique de A.
On a : $\mathbb{1}_A$ est mesurable si et seulement si A est mesurable.

(c) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de X dans $\overline{\mathbb{R}}$ ou dans $\mathbb{C}$.
Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f, alors f est mesurable.

(d) On suppose que $f\colon X\to Y$ et $\mathcal{B}=\sigma(\mathcal{C})$ pour une certaine partie $\mathcal{C}$ de $\mathscr{P}(Y)$.
Dans ce cas, f est $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-mesurable si et seulement si : $\;f^{-1}(C)\in\mathcal{A}\;$ pour tout $C\in\mathcal{C}$.

Quand X et Y sont des espaces topologiques, on en déduit que toute application continue de X dans Y est borélienne.

(e) Soient $f\colon X\to Y$ et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}'\subseteq\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ dont la réunion est X.
On munit A_n de la tribu $\mathcal{A}_n=i_n^{-1}(\mathcal{A}):=\underbrace{\{A\cap A_n\ ;\ A\in\mathcal{A}\}}_{\{A\in\mathcal{A}\ \mid\ A\subseteq A_n\}}$, où i_n est l'injection de A_n dans X.
Par exemple, on a : $\mathcal{A}_n=\mathscr{B}(A_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}'$ quand X est un espace topologique et $\mathcal{A}=\mathscr{B}(X)$.

On a : f est mesurable si et seulement si pour tout $n\in\mathbb{N}'$, la restriction $f|_{A_n}$ est mesurable.(*)

Définition-Proposition

On se donne des espaces mesurables $(X,\mathcal{A})$, $(Y,\mathcal{B})$ et $(Z,\mathcal{C})$.

(a) On munit $X\times Y$ de la tribu $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}:=\sigma\big(\{A\times B\ ;\ A\in\mathcal{A}\text{ et }B\in\mathcal{B}\}\big)$.
On appelle $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ la *tribu produit de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$*. Par exemple, on a : $\mathscr{B}(\mathbb{R}^2)=\mathscr{B}(\mathbb{R})\otimes\mathscr{B}(\mathbb{R})$.

(b) Une application $u\colon \begin{array}{rcl} X & \to & Y\times Z \\ x & \mapsto & (v(x),w(x)) \end{array}$ est mesurable si et seulement si v et w sont mesurables.

Donc la somme et le produit de deux fonctions mesurables de X dans $\mathbb{C}$ sont mesurables.

Définition

On considère un espace mesurable $(X,\mathcal{A})$ et une application $\mu\colon\mathcal{A}\to\mathbb{R}^+\cup\{+\infty\}$.

(a) On dit que μ est une *mesure* sur $(X,\mathcal{A})$ (ou que « $(X,\mathcal{A},\mu)$ *est un espace mesuré* ») si(**) :

(i) $\mu(\emptyset)=0$;
(ii) $\mu\Big(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}A_n\Big)=\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}\mu(A_n)$ quand A_n, $n\in\mathbb{N}$, sont des éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints.

Dans ce cas, on dit que $N\subseteq X$ est *μ-négligeable* s'il existe $A\in\mathcal{A}$ tel que : $N\subseteq A$ et $\mu(A)=0$.
On dira « μ-presque partout » (en abrégé « p. p. ») pour « en dehors d'une partie μ-négligeable ».

(b) On suppose que μ est une mesure sur $(X,\mathcal{A})$. On dit que μ est *finie* si : $\mu(X)<+\infty$.

On dit que μ est *σ-finie* s'il existe une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que :

$$X=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\quad\text{ et }\quad\mu(A_n)<+\infty\ \text{ pour tout } n\geq 0.$$

Définition-Proposition

Soit $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré. Il est dit *complet* si $\mathcal{A}$ contient toutes les parties μ-négligeable.

On pose : $\widetilde{\mathcal{A}}:=\{A\cup N\ ;\ A\in\mathcal{A}\text{ et } N\subseteq X\ \mu\text{-négligeable}\}$ et $\widetilde{\mu}(A\cup N)\overset{\text{indépendant décomposition}}{:=}\mu(A)$.
On a : $\widetilde{\mathcal{A}}$ est une tribu sur X « complétée de $(\mathcal{A},\mu)$ » et $(X,\widetilde{\mathcal{A}},\widetilde{\mu})$ est un espace mesuré complet.

Exemple

La mesure de Lebesgue λ sur $(\mathbb{R},\mathscr{B}(\mathbb{R}))$: $\lambda(]a,b[):=b-a$ pour $a,b\in\mathbb{R}$ et $a<b$ (unicité).

On appelle *tribu de Lebesgue* la tribu complétée de $(\mathscr{B}(\mathbb{R}),\lambda)$.

(*) Cela découle des égalités suivantes : $f|_{A_n}^{-1}(B)=f^{-1}(B)\cap A_n$ et $f^{-1}(B)=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}'}f|_{A_n}^{-1}(B)$ pour tout $B\in\mathcal{B}$.

(**) La *somme* d'une famille $(a_i)_{i\in I}$ de réels positifs avec I infini et I dénombrable (au sens où I s'injecte dans $\mathbb{N}$) est :

$$\underbrace{\sum_{i\in I}a_i}_{\text{indépendant du choix de la numérotation}}:=\lim_{n\to+\infty}\underbrace{\big(a_{i_0}+a_{i_0}+\cdots+a_{i_n}\big)}_{\text{croissant en } n}\in\mathbb{R}^+\cup\{+\infty\}\quad\text{où}\quad I=\{\underbrace{i_n}_{\text{distincts}}\ ;\ n\in\mathbb{N}\}.$$

Intégrale de Lebesgue : à retenir (J-Y D)

On fixe un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$. On munit $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, $\mathbb{R}$, et $\mathbb{C}$ de leur tribu borélienne.

Définition-Proposition

(a) Soit $\varphi \colon X \to \mathbb{C}$. On dit que φ *est étagée* si φ est mesurable d'image finie.

Donc φ est étagée si et seulement si elle s'écrit $\varphi = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \mathbb{1}_{A_k}$ avec $p \in \mathbb{N}$, $A_1, ..., A_p \in \mathcal{A}$ et $\alpha_1, ..., \alpha_p \in \mathbb{C}$.

(b) On considère une fonction étagée positive $\varphi \colon X \to \mathbb{R}^+$. On note :

$$\int_X \varphi \,\mathrm{d}\mu \;:=\; \sum_{\alpha \in \mathbb{R}^+} \underbrace{\alpha\, \mu(\varphi^{-1}(\{\alpha\}))}_{0 \text{ quand } \alpha = 0 \text{ et } \mu(\varphi^{-1}(\{\alpha\})) = +\infty} \;\leq\; +\infty.$$

(c) Toute fonction mesurable positive $f \colon X \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ est limite simple d'une suite croissante de fonctions étagées positives. $\leftarrow$ $\left[\text{Par exemple : } \varphi_n(x) := \sum_{k=0}^{2^{2n}-1} \frac{k}{2^n} \mathbb{1}_{\left\{\frac{k}{2^n} \leq f < \frac{k+1}{2^n}\right\}}(x) + 2^n \mathbb{1}_{\left\{2^n \leq f \leq +\infty\right\}}(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(x) \text{ pour tout } x \in X.\right]$

Définition-Proposition

$\leftarrow$ [idée : découpage de l'ensemble d'arrivée]

(a) Pour toute application mesurable positive $f \colon X \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, on note :

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu \;:=\; \sup_{\varphi \colon X \to \mathbb{R}^+ \text{ étagée, } \varphi \leq f} \int_X \varphi \,\mathrm{d}\mu \;\leq\; +\infty.$$

$\leftarrow$ [il est clair que $f \mapsto \int_X f \,\mathrm{d}\mu$ croît]

Donc : $\quad (\int_X f \,\mathrm{d}\mu = 0 \iff f(x) = 0 \;\; \mu\text{-p.p.}) \quad$ et $\quad (\int_X f \,\mathrm{d}\mu < +\infty \implies f(x) < +\infty \;\; \mu\text{-p.p.})$.

(b) On note : $\mathscr{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu) := \left\{ f \colon X \to \mathbb{K} \text{ mesurable} \mid \|f\|_1 := \int_X |f| \,\mathrm{d}\mu < +\infty \right\}$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Une *fonction μ-intégrable sur X* est un élément de : $\mathscr{L}^1(\mu) := \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu) = \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu) + \mathrm{i}\, \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$.

On note : $\quad \int_X f \,\mathrm{d}\mu \;:=\; \int_X f^+ \,\mathrm{d}\mu \;-\; \int_X f^- \,\mathrm{d}\mu)$ quand $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ $^{(*)}$

et $\quad \int_X f \,\mathrm{d}\mu \;:=\; \int_X \mathrm{Re}\, f \,\mathrm{d}\mu + \mathrm{i} \int_X \mathrm{Im}\, f \,\mathrm{d}\mu$ quand $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$.

Donc $\mathscr{L}^1(\mu)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^X$ et $f \in \mathscr{L}^1(\mu) \mapsto \int_X f \,\mathrm{d}\mu$ est $\underbrace{\text{linéaire}}_{\text{pour } f,\, g \text{ mesurables } \geq 0, \text{ on a aussi : } \int_X (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int_X f\,\mathrm{d}\mu + \int_X g\,\mathrm{d}\mu}$. De plus :

$\int_X f \,\mathrm{d}\mu \;\leq\; \int_X g \,\mathrm{d}\mu$ si $f, g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ et $f \leq g$, et, $\left| \int_X f \,\mathrm{d}\mu \right| \;\leq\; \int_X |f| \,\mathrm{d}\mu$ si $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$.

(c) Soit $A \in \mathcal{A}$. On note $\int_A f \,\mathrm{d}\mu := \int_X \mathbb{1}_A f \,\mathrm{d}\mu$ pour $f \colon X \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ mesurable ou $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$.

Soit J un intervalle. On note $\mathscr{L}^1(J) := \mathscr{L}^1(\mathrm{d}x_J)$ où $\mathrm{d}x_J$ est la restriction à $(J, \mathscr{B}(J))$ de la mesure de Lebesgue $\mathrm{d}x$ sur $\mathscr{B}(\mathbb{R})$, et, $\mathscr{L}^{1\,loc}(J) := \{ f \colon J \to \mathbb{C} \mid \forall a, b \in J \quad (a < b \Longrightarrow f|_{[a,b]} \in \mathscr{L}^1([a,b])) \}$.

Théorème

(a) Pour toute suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, on a :

$$\int_X \underbrace{\lim_{n \to +\infty} \inf_{k \geq n} f_k}_{\text{mesurable}} \,\mathrm{d}\mu \;\leq\; \lim_{n \to +\infty} \inf_{k \geq n} \int_X f_k \,\mathrm{d}\mu \qquad \text{« lemme de Fatou ».}$$

(b) Pour toute suite *croissante* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, on a :

$$\int_X \underbrace{\lim_{n \to +\infty} f_n}_{\text{mesurable}} \,\mathrm{d}\mu \;=\; \lim_{n \to +\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \qquad \underbrace{\text{« théorème de convergence monotone »}}_{\text{(appelé aussi « théorème de Beppo-Levi »)}}.$$

(c) On considère une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'applications de X dans $\mathbb{C}$.

On suppose que
- (i) la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge pour μ-presque tout $x \in X$;
- (ii) l'application $x \mapsto f_n(x)$ est mesurable pour tout $n \in \mathbb{N}$;
- (iii) il existe $g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ tel que $\sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)| \leq g(x)$ μ-p.p.

Alors
- il existe $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ tel que $f_n(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(x)$ μ-p.p. ;
- $\underbrace{\int_X f_n \,\mathrm{d}\mu}_{\text{défini}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_X f \,\mathrm{d}\mu$ « théorème de convergence dominée » $(**)$.

(d) Soient $(f_n)_{n \geq 0} \in \mathscr{L}^1(\mu)^{\mathbb{N}}$ et $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$. On suppose que : $\|f_n - f\|_1 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Il existe une suite extraite $(f_{n_k})_{k \geq 0}$ de $(f_n)_{n \geq 0}$ qui converge simplement μ-presque partout vers f.

$(*)$ Quand f est réelle, on pose : $f^+(x) := \max(0, f(x))$ et $f^-(x) := \max(0, -f(x))$ pour $x \in X$, donc $f = f^+ - f^-$.

$(**)$ En particulier : si une suite d'applications continues $f_n \colon [a,b] \to \mathbb{C}$ $(a < b)$, $n \in \mathbb{N}$, converge uniformément vers f, alors $\int_a^b f_n(x) \,\mathrm{d}x \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x$ (appliquer le théorème aux applications $f_n - f \colon [a,b] \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$).

Proposition (« continuité et différentiation d'une intégrale dépendant d'un paramètre »)

On se donne $N \in \mathbb{N}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, un espace mesuré $(T, \mathcal{T}, \nu)$, et des applications $f_t \colon \Omega \to \mathbb{C}$, $t \in T$.

(a) On suppose que
- (i) l'application $t \mapsto f_t(x)$ est mesurable pour tout $x \in \Omega$;
- (ii) $a \in \Omega$ et f_t est continue en a pour ν-presque tout $t \in T$;
- (iii) il existe $g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\nu)$ tel que $\sup\limits_{x\in\Omega} |f_t(x)| \leq g(t)$ ν-p.p.

Alors l'application $F \colon x \in \Omega \mapsto \underbrace{\int_T f_t(x)\,\mathrm{d}\nu(t)}_{\text{défini}}$ est continue en a.

(b) On suppose que
- (i) l'application $t \mapsto f_t(x)$ appartient à $\mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\nu)$ pour tout $x \in \Omega$ $(***)$;
- (ii) Ω ouvert de $\mathbb{R}^N$ et f_t différentiable sur Ω pour ν-presque tout $t \in T$;
- (iii) il existe $\widetilde{g} \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\nu)$ tel que $\sup\limits_{x\in\Omega} \|\mathrm{d}f_t(x)\| \leq \widetilde{g}(t)$ ν-p.p.

Alors
- l'application $F \colon x \in \Omega \mapsto \int_T f_t(x)\,\mathrm{d}\nu(t)$ est différentiable sur Ω ;
- $\mathrm{d}F(x)\cdot h = \underbrace{\int_T \mathrm{d}f_t(x)\cdot h\,\mathrm{d}\nu(t)}_{\text{défini}}$ pour tous $x \in \Omega$ et $h \in \mathbb{R}^N$.

Définition-Proposition ← [idée : découpage de l'ensemble de départ]

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ et $\mathcal{I} \in \mathbb{R}$.

(a) On dit que f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ d'intégrale $\mathcal{I}$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tous $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$ et $\xi_1 \in [x_0, x_1]$, ..., $\xi_n \in [x_{n-1}, x_n]$, on a :

$$\max_{1\leq k\leq n}(x_k - x_{k-1}) < \alpha \quad\Longrightarrow\quad \left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,(x_k - x_{k-1}) - \mathcal{I}\right| < \varepsilon.$$

(b) La mesure de Lebesgue λ sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ vérifie la condition de « régularité » suivante :

$$\lambda(A) = \inf_{\substack{\mathcal{O} \text{ ouvert de } \mathbb{R} \\ \mathcal{O}\supseteq A}} \lambda(\mathcal{O}) = \sup_{\substack{K \text{ compact de } \mathbb{R} \\ K\subseteq A}} \lambda(K) \qquad \text{pour tout } A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}).$$

De plus, tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion au plus dénombrable d'intervalles ouverts 2 à 2 disjoints et la mesure de Lebesgue d'un intervalle ouvert J de $\mathbb{R}$ est sa longueur (égale à $\sup J - \inf J$ si $J \neq \emptyset$).

Une partie C de $\mathbb{R}$ est donc Lebesgue-négligeable si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite $((a_n, b_n))_{n\geq 0} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathbb{N}}$ avec $a_n < b_n$ quand $n \geq 0$, telle que : $C \subseteq \bigcup\limits_{n\geq 0}]a_n, b_n[$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(b_n - a_n) < \varepsilon$.

(c) On a : f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ si et seulement f est bornée et l'ensemble des points de discontinuité de f est Lebesgue-négligeable ; dans ce cas f est Lebesgue-intégrable de $[a,b]$ muni de la tribu de Lebesgue dans $\mathbb{R}$ muni de la tribu borélienne, et $\underbrace{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}_{F(b)-F(a) \text{ si } f \text{ est continue de primitive } F} = \int_{[a,b]} \underbrace{f}_{\text{mesurable pour la tribu complétée de } \mathscr{B}([a,b])}(x)\,\mathrm{d}x$.

Proposition

(a) Pour toute application mesurable $f \colon X \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ et tout $a > 0$, on a :

$$\mu(\{f \geq a\}) \leq \tfrac{1}{a}\int_X f\,\mathrm{d}\mu \qquad \text{« inégalité de Markov ».}$$

(b) Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$.

Si $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n) < +\infty$, alors $\mu(\text{réalisation d'une infinité de } A_n) = 0$ « lemme de Borel-Cantelli ».

Définition-Proposition

On considère une application mesurable positive $p \colon X \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

(a) La *mesure de densité p par rapport à μ* est la mesure $p\mu$ sur X déterminée par :

$$(p\mu)(A) := \int_A p\,\mathrm{d}\mu \qquad \text{pour tout } A \in \mathcal{A}.$$

(b) Pour toute application $f \colon X \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ mesurable, on a :

$$\int_X f\,\mathrm{d}p\mu = \int_X fp\,\mathrm{d}\mu.$$

On en déduit que pour toute application mesurable $f \colon X \to \mathbb{C}$, on a :

$$f \in \mathscr{L}^1(p\mu) \iff fp \in \mathscr{L}^1(\mu) \ ; \qquad \text{dans ce cas : } \int_X f\,\mathrm{d}p\mu = \int_X fp\,\mathrm{d}\mu.$$

$(***)$ Lorsque Ω est convexe et $x_0 \in \Omega$, l'inégalité des accroissements finis permet de remplacer la condition (i) par la condition suivante : « l'application $t \mapsto f_t(x)$ est mesurable pour tout $x \in \Omega$ et $t \mapsto f_t(x_0)$ appartient à $\mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\nu)$ ».

Théorèmes de Fubini : à retenir (J-Y D)

On fixe des espaces mesurés $(X,\mathcal{A},\mu)$ et $(Y,\mathcal{B},\nu)$ tels que $\underline{\underline{\mu \text{ et } \nu \text{ sont } \sigma\text{-finies}}}$.

Proposition

Il existe une unique mesure $\mu\otimes\nu$ sur $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$, appelée *mesure produit de μ et ν*, vérifiant

$$(\mu\otimes\nu)(A\times B)=\underbrace{\mu(A)\,\nu(B)}_{0 \text{ quand l'un vaut } 0 \text{ et l'autre vaut } +\infty} \quad \text{pour tous } \ A\in\mathcal{A} \ \text{ et } \ B\in\mathcal{B}.\ ^{(\star)}$$

Théorème (« théorèmes de Fubini-Tonelli et Fubini-Lebesgue »)

(a) Pour toute application mesurable positive $f\colon \overbrace{X\times Y}^{\text{muni de } \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}} \to \overbrace{\mathbb{R}^+\cup\{+\infty\}}^{\text{muni de } \mathscr{B}(\mathbb{R}^+\cup\{+\infty\})}$, on a :

les applications $\begin{array}{rcl} X & \to & \mathbb{R}^+\cup\{+\infty\} \\ x & \mapsto & \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\end{array}$ et $\begin{array}{rcl} Y & \to & \mathbb{R}^+\cup\{+\infty\} \\ y & \mapsto & \int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)\end{array}$ sont mesurables,

et $\boxed{\int_{X\times Y} f(x,y)\,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu)(x,y) \;=\; \int_X\Big(\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\Big)\mathrm{d}\mu(x) \;=\; \int_Y\Big(\int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)\Big)\mathrm{d}\nu(y) \;\le +\infty}$.

(b) Pour toute application $\mu\otimes\nu$-intégrable $f\colon X\times Y\to\mathbb{C}$, on a :

la fonction $\begin{array}{rcl} X & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\end{array}$ est définie μ-presque partout et $\underbrace{\mu\text{-intégrable}}_{\text{on fixe ses valeurs égales à } 0 \text{ sur un certain ensemble mesurable } \mu\text{-négligeable}}$,

la fonction $\begin{array}{rcl} Y & \to & \mathbb{C} \\ y & \mapsto & \int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)\end{array}$ est définie ν-presque partout et $\underbrace{\nu\text{-intégrable}}_{\text{on fixe ses valeurs égales à } 0 \text{ sur un certain ensemble mesurable } \nu\text{-négligeable}}$,

et $\boxed{\int_{X\times Y} f(x,y)\,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu)(x,y) \;=\; \int_X\Big(\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\Big)\mathrm{d}\mu(x) \;=\; \int_Y\Big(\int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)\Big)\mathrm{d}\nu(y)}$.

(c) En particulier, pour tous $g\in\mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$ et $h\in\mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$, on a :

$$\int_{X\times Y} g(x)\,h(y)\,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu)(x,y) \;=\; \int_X g(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\ \int_Y h(y)\,\mathrm{d}\nu(y).\ ^{(\star\star)}$$

Utilisation des théorèmes de Fubini

On munit $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, et $\mathbb{R}^2$ de leur tribu borélienne et utilise sur $\mathbb{R}$ $\overbrace{\text{la mesure de Lebesgue}}^{\text{on notera } \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x \text{ l'intégrale de } h}$.

(a) On considère une application $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{C}$ mesurable.

On a : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x,y)|\,\mathrm{d}y\Big)}_{\text{mesurable en } x}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x,y)|\,\mathrm{d}x\Big)}_{\text{mesurable en } y}\mathrm{d}y \ \le\ +\infty$

et, quand le résultat commun est fini : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y\Big)}_{\text{intégrable en } x}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x\Big)}_{\text{intégrable en } y}\mathrm{d}y.$

(b) On considère une suite d'applications $u_n\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ mesurables avec $n\ge 0$.

On a : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}|u_n(x)|\Big)}_{\text{mesurable en } x}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}|u_n(x)|\,\mathrm{d}x\Big) \ \le\ +\infty$

et, quand le résultat commun est fini : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x)\Big)}_{\text{intégrable en } x}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}u_n(x)\,\mathrm{d}x\Big).$

(c) On considère une suite double $(u_{p,q})_{p,q\ge 0}$ de nombres complexes.

On a : $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\Big(\sum_{q=0}^{+\infty}|u_{p,q}|\Big) = \sum_{q=0}^{+\infty}\Big(\sum_{p=0}^{+\infty}|u_{p,q}|\Big) \ \le\ +\infty$

et, quand le résultat commun est fini : $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\Big(\sum_{q=0}^{+\infty}u_{p,q}\Big) = \sum_{q=0}^{+\infty}\Big(\sum_{p=0}^{+\infty}u_{p,q}\Big).$

---

utiliser $E=\mathrm{pr}_1^{-1}(E\times\{0\})$

$(\star)$ On note $\widetilde{\lambda}$ la mesure de Lebesgue sur la tribu de Lebesgue $\widetilde{\mathscr{B}(\mathbb{R})}$. On fixe — existe — $E\subseteq\mathbb{R}$ tel que $E\notin\widetilde{\mathscr{B}(\mathbb{R})}$. On a : $(\widetilde{\lambda}\otimes\widetilde{\lambda})(\mathbb{R}\times\{0\})=0$. La partie $E\times\{0\}$ de $\mathbb{R}^2$ est donc $\widetilde{\lambda}\otimes\widetilde{\lambda}$-négligeable, sans être un élément de $\widetilde{\mathscr{B}(\mathbb{R})}\otimes\widetilde{\mathscr{B}(\mathbb{R})}$.

$(\star\star)$ À partir des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels $E=\mathbb{C}^X$ et $F=\mathbb{C}^Y$, une construction algébrique classique permet de construire un certain espace vectoriel quotient de $\mathbb{C}^{(E\times F)}$ noté $E\otimes_{\mathbb{C}}F$ (appelé « produit tensoriel de E et F »), muni de la projection canonique de $E\times F$ dans $E\otimes_{\mathbb{C}}F$ notée $(g,h)\mapsto g\otimes h$. On peut montrer qu'il existe une unique application linéaire de $\mathbb{C}^X\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}^Y$ dans $\mathbb{C}^{X\times Y}$ qui envoie chaque $g\otimes h$ sur $(x,y)\mapsto g(x)\,h(y)$, et que cette application est injective.

Par abus de notation, on note : $\boxed{(g\otimes h)(x,y)=g(x)\,h(y) \ \text{ pour } \ g\colon X\to\mathbb{C},\ h\colon Y\to\mathbb{C},\ x\in X \text{ et } y\in Y}$.

Théorème de changement de variable : à retenir (J-Y D)

On fixe un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Définition-Proposition

On considère un espace mesurable $(Y, \mathcal{B})$ et une application mesurable $f\colon X \to Y$.

(a) La *mesure image de μ par f* est la mesure $f(\mu)$ sur Y déterminée par :

$$f(\mu)(B) := \mu(f^{-1}(B)) \text{ pour tout } B \in \mathcal{B}.$$ $\leftarrow$ [si $\mu(X) = 1$ et $\mathbb{P} := \mu$, on note : $\mathbb{P}_f := f(\mu)$]

(b) Pour toute application mesurable $h\colon Y \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, on a :

$$\int_Y h \, \mathrm{d}f(\mu) = \int_X h \circ f \, \mathrm{d}\mu.$$

On en déduit que pour toute application mesurable $h\colon Y \to \mathbb{C}$, on a :

$$h \in \mathscr{L}^1(f(\mu)) \iff h \circ f \in \mathscr{L}^1(\mu)\,; \quad \text{dans ce cas : } \int_Y h \, \mathrm{d}f(\mu) = \int_X h \circ f \, \mathrm{d}\mu.$$

Théorème (« théorème de changement de variable »)

$\leftarrow$ [on traduit ici l'égalité $\lambda^{\otimes n}|_{\varphi(U)} = \varphi(|J_\varphi|\,\lambda^{\otimes n}|_U)$]

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa tribu borélienne $\mathscr{B}(\mathbb{R})^{\otimes n}$ et de la mesure $\lambda^{\otimes n}$, où λ est la mesure de Lebesgue.
On considère un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et une application $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)\colon U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1.

On note : $J_\varphi(x) := \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x)\right)_{1 \le i,j \le n}$ pour $x \in U$ et $\frac{D(y_1,\dots,y_n)}{D(x_1,\dots,x_n)} := \det J_\varphi = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$.

On suppose que : φ est injective et vérifie $\det J_\varphi(x) \neq 0$ pour tout $x \in U$.
D'après le théorème d'inversion locale, la partie $\varphi(U)$ de $\mathbb{R}^n$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

(a) Pour toute $f\colon \varphi(U) \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ mesurable, l'application $(f \circ \varphi)\,|\det J_\varphi|$ est mesurable et

$$\boxed{\int \cdots \int_{\varphi(U)} f(y_1, \dots, y_n)\, \mathrm{d}y_1 \cdots \mathrm{d}y_n \;=\; \int \cdots \int_U f(\varphi(x_1, \dots, x_n))\, |\det J_\varphi(x_1, \dots, x_n)|\, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n \;\le\; +\infty}.$$

(b) Pour toute $f\colon \varphi(U) \to \mathbb{C}$ intégrable, l'application $(f \circ \varphi)\,|\det J_\varphi|$ est intégrable et

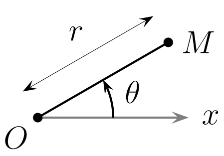
$$\boxed{\int \cdots \int_{\varphi(U)} f(y_1, \dots, y_n)\, \underbrace{\mathrm{d}y_1 \cdots \mathrm{d}y_n}_{\text{quand } n = 1 \text{ : poser } y_1 = \varphi(x_1) \text{ et penser à } |\mathrm{d}y_1| \text{ plutôt qu'à } \mathrm{d}y_1} \;=\; \int \cdots \int_U f(\varphi(x_1, \dots, x_n))\, |\det J_\varphi(x_1, \dots, x_n)|\, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n}.$$

Utilisation

Recette du théorème de changement de variable : « $\underbrace{\mathrm{d}y_1 \cdots \mathrm{d}y_n}_{\text{penser à } |\mathrm{d}y_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_n|} = \left|\frac{D(y_1,\dots,y_n)}{D(x_1,\dots,x_n)}\right| \underbrace{\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n}_{\text{penser à } |\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n|}$ ».

(a) Passage en coordonnées polaires : $\varphi(U) = \underbrace{\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}^+ \times \{0\})}_{\text{de complémentaire négligeable}}$ où φ est définie par

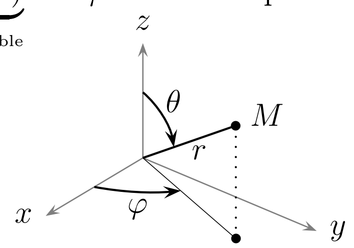
$$\underset{\varphi(r,\theta)}{\overset{M}{\|}} \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad \text{avec} \quad r > 0 \;\text{ et }\; 0 < \theta < 2\pi$$



et la recette s'écrit : $\boxed{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta}$.

(b) Passage en coordonnées sphériques : $\varphi(U) = \underbrace{\mathbb{R}^3 \setminus (\mathbb{R}^+ \times \{0\} \times \mathbb{R})}_{\text{de complémentaire négligeable}}$ où φ est définie par

$$\underset{\varphi(r,\theta,\varphi)}{\overset{M}{\|}} \begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \quad \text{avec } r > 0,\; 0 < \underbrace{\theta}_{\text{colatitude}} < \pi \;\text{ et }\; 0 < \underbrace{\varphi}_{\text{longitude}} < 2\pi,$$



et la recette s'écrit : $\boxed{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi}$. $(\star\star\star)$

$(\star\star\star)$ On généralise (a) et (b) avec le changement de variable suivant qui donnera $\varphi(U) = \underbrace{\mathbb{R}^n \setminus (\mathbb{R}^{n-2} \times \mathbb{R}^+ \times \{0\})}_{\text{de complémentaire négligeable}}$:

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\theta_1 \\ x_2 = r\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ \dots\;\dots\;\dots \\ x_{n-1} = r\sin\theta_1 \cdots \sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} \\ x_n = r\sin\theta_1 \cdots \sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \overbrace{r > 0}^{r = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}},\quad \overbrace{0 < \theta_1 < \pi}^{\theta_1 = \arccos\frac{x_1}{\sqrt{r^2}}} \;\text{ et } \cdots \text{ et }\; \overbrace{0 < \theta_{n-2} < \pi}^{\theta_{n-2} = \arccos\frac{x_{n-2}}{\sqrt{r^2 - x_1^2 - \cdots - x_{n-3}^2}}},\;\text{ et }\; \underbrace{0 < \theta_{n-1} < 2\pi}_{e^{i\theta_{n-1}} = \frac{x_{n-1} + i\,x_n}{\sqrt{r^2 - x_1^2 - \cdots - x_{n-2}^2}}},$$

et la recette devient $\boxed{\overbrace{\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n \;=\; r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1\,\sin^{n-3}\theta_2 \cdots \sin\theta_{n-2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta_1 \cdots \mathrm{d}\theta_{n-1}}^{\varphi_n(r,\theta_1,\dots,\theta_{n-1}) \,=\, (u,\, \varphi_{n-1}(v,\theta_2,\dots,\theta_{n-1})) \text{ avec } u = r\cos\theta_1 \text{ et } v = r\sin\theta_1}}$ $(n \ge 2)$

Espaces L^1 et L^2 : à retenir (J-Y D)

On fixe un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$, un ensemble I, et $p \in \{1, 2\}$.

Définition-Proposition ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

(a) Pour toute $f\colon X \to \mathbb{C}$ mesurable, on note : $\|f\|_p := \left(\int_X |f(x)|^p \, \mathrm{d}\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \leq +\infty$

(b) On note $\mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu) := \left\{ f\colon X \to \mathbb{K} \text{ mesurable} \mid \|f\|_p < +\infty \right\}$ et $\boxed{L^p_{\mathbb{K}}(\mu) := \mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)/\mathcal{N}_\mu}^{(*)}$
où $\mathcal{N}_\mu$ est le sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ formé des fonctions mesurables nulles μ-presque partout.

(c) On pose : $l^p_{\mathbb{K}}(I) = L^p_{\mathbb{K}}(I, \mathscr{P}(I), \text{comptage})$ et $L^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}) = L^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}, \text{Borel}, \mathrm{d}x) \overset{\text{can}}{\xrightarrow{\sim}} L^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}, \text{Lebesgue}, \mathrm{d}x)$.
Ainsi : $l^p_{\mathbb{K}}(I) := \left\{ (a_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I \mid \sum_{i\in I} |a_i|^p < +\infty \right\}$ et $\|(a_i)_{i\in I}\|_p := \left(\sum_{i\in I} |a_i|^p \right)^{1/p}$.

(d) On a : $l^1_{\mathbb{C}}(I) \subseteq l^2_{\mathbb{C}}(I)$, et, $L^2_{\mathbb{C}}(\mu) \subseteq L^1_{\mathbb{C}}(\mu)$ lorsque $\mu(X) < +\infty$.

Proposition

Soient $f, g\colon X \to \mathbb{C}$ deux applications mesurables.

(a) On a : $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \leq +\infty$ « inégalité de Minkowski ».

(b) On a : $\|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_2 \leq +\infty$ « inégalité de Hölder ».

Proposition

(a) On a : $\mathrm{Vect}\big(\mathbb{1}_A\big)_{A\in\mathcal{A} \text{ et } \mu(A)<+\infty}$ est dense dans $L^p_{\mathbb{C}}(\mu)$.

(c) Pour tout intervalle ouvert J, on a : $\mathrm{Vect}\big(\mathbb{1}_{[a,b]}\big)_{a,b\in J}$ et $\mathscr{C}_c(J)$ sont denses dans $L^p_{\mathbb{C}}(J)$,
où $\mathscr{C}_c(J)$ désigne l'ensemble des $f \in \mathscr{C}(J)$ tels que $\operatorname{Supp} f := \overline{\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}}^{(**)}$ est compact.

Théorème (« théorème de Riesz-Fischer »)

(a) L'espace vectoriel $L^p_{\mathbb{C}}(\mu)$ muni de $\dot{f} \mapsto \|f\|_p$ est un espace de Banach.

issu de la dém. du (a)

(b) Si $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers f dans $\mathscr{L}^p_{\mathbb{C}}(\mu)$, alors $(f_n)_{n\geq 0}$ a une suite extraite $(f_{n_k})_{k\geq 0}$ qui converge simplement presque partout vers f.

Définition-Proposition

Soient E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I un ensemble.
Soient $(a_i)_{i\in I} \in E^I$ et $a \in E$. On note $\mathscr{P}_f(I)$ l'ensemble des parties finies de I.

(a) On dit que la famille $(a_i)_{i\in I}$ est *sommable* de somme a si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists J \in \mathscr{P}_f(I) \quad \forall J' \in \mathscr{P}_f(I) \quad \Big(J' \supseteq J \implies \Big\| \sum_{j'\in J'} a_{j'} - a \Big\| < \varepsilon \Big)$$

Dans ce cas, on note : $\sum_{i\in I} a_i = a$.

(b) On suppose ici que E est complet. La famille $(a_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists J \in \mathscr{P}_f(I) \quad \forall K \in \mathscr{P}_f(I \setminus J) \quad \Big\| \sum_{k\in K} a_k \Big\| < \varepsilon \qquad \text{(« critère de Cauchy »)}.$$

En particulier, si a famille $(\|a_i\|)_{i\in I}$ est sommable dans $\mathbb{R}$, alors $(a_i)_{i\in I}$ est sommable dans E.

(c) On suppose ici que $E = \mathbb{C}$ et note m la mesure de comptage sur $(I, \mathscr{P}(I))$.
On a : $(a_i)_{i\in I} \in l^1_{\mathbb{C}}(I)$ si et seulement si $(a_i)_{i\in I}$ est sommable ; dans ce cas : $\sum_{i\in I} a_i = \int_I a_i \, \mathrm{d}m(i)$.
Si $I = \mathbb{N}$: $\int_{\mathbb{N}} a_n \, \mathrm{d}m(n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ quand $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ ou $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$.
Si $I = \mathbb{Z}$: $\int_{\mathbb{Z}} a_n \, \mathrm{d}m(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}$ quand $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{Z}}$ ou $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$.

$(*)$ Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et F un sous-espace vectoriel de E.
On pose $\dot{x} := \{x + y \,;\, y \in F\}$ quand $x \in E$, puis $E/F := \{\dot{x} \,;\, x \in E\}$.
L'ensemble E/F muni des « lois » portant sur $u, v \in E/F$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ déterminées par les égalités

(i) $u + v := \dot{\widehat{x + y}}$ indépendamment du choix d'éléments x, y de E tels que $u = \dot{x}$ et $v = \dot{y}$

(ii) $\alpha{\times}u := \dot{\widehat{\alpha x}}$ indépendamment du choix d'un élément x de E tel que $u = \dot{x}$

est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, appelé $\mathbb{K}$-*espace vectoriel quotient de E par F*.

$(**)$ Pour tout $f \in \mathscr{L}^{1_{loc}}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ on note $\operatorname{Supp} f$ le plus petit fermé de $\mathbb{R}$ en dehors duquel f s'annule presque partout.

Espaces de Hilbert : à retenir (J-Y D)

Définition-Proposition

On se donne un espace vectoriel E sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

(a) On appelle *produit scalaire sur E* une application $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$ de E^2 dans $\mathbb{K}$ telle que
(i) l'application $x \mapsto \langle x, y\rangle$ est linéaire pour tout $y \in E$;
(ii) on a : $\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$ pour tous $x, y \in E$; ⟵[dans ce cas : $\langle x, x\rangle \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in E$]
(iii) on a : $\langle x, x\rangle \geq 0$ et $(\langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0)$ pour tout $x \in E \setminus \{0\}$.

Dans ce cas *l'orthogonal* d'une partie A de E est : $A^\perp := \{x \in E \mid \forall a \in A\ \langle x, a\rangle = 0\}$.

(b) On appelle *espace préhilbertien* un espace vectoriel E muni d'un produit scalaire.

Dans ce cas, $x \in E \mapsto \|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle} \in \mathbb{R}^+$ est une norme sur E, et pour tous $x, y \in E$, on a :
$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$ « inégalité de Cauchy-Schwarz » et $|\langle x, y\rangle| = \|x\|\|y\| \iff (x, y)$ liée.

(b) On appelle *espace de Hilbert* un espace préhilbertien qui est complet.

Exemples ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré et I est un ensemble)

(a) L'espace vectoriel normé $L^2_{\mathbb{K}}(\mu)$ est un espace de Hilbert pour $\langle f, g\rangle := \int_X f(x)\overline{g(x)}\, d\mu(x)$.

(b) L'espace vectoriel normé $l^2_{\mathbb{K}}(I)$ est un espace de Hilbert pour $\langle (a_i)_{i\in I}, (b_i)_{i\in I}\rangle := \sum_{i\in I} a_i\overline{b_i}$.

Proposition

Soient E un espace de Hilbert sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et F un sous-espace vectoriel fermé de E.(*)

(a) Pour tout $A \subseteq E$, la partie $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de E.

(b) On a : $(F^\perp)^\perp = F$ et $F \oplus F^\perp = E$.

En particulier, pour tout $A \subseteq E$, on a : $\overline{\operatorname{Vect} A} = E \iff A^\perp = \{0\}$. ⟵[remarquer que $(\overline{\operatorname{Vect} A})^\perp = A^\perp$]

Théorème (« théorème de représentation de Riesz »)

Soit E un espace de Hilbert sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On note E' l'espace vectoriel normé formé des applications linéaires continues de E dans $\mathbb{K}$.

L'application $y \in E \mapsto \langle \cdot\,, y\rangle \in E'$ est bijective et conserve la norme.

Définition

Soient E un espace préhilbertien sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $(e_i)_{i\in I}$ une famille orthonormée dans E.

On dit que la famille orthonormée $(e_i)_{i\in I}$ est une base hilbertienne de E si elle vérifie l'une des trois propriétés équivalentes (i), (ii) et (iii) suivantes :

(i) $\overline{\operatorname{Vect}\{e_i\}_{i\in I}} = E$;

(ii) $\forall x \in E \quad \sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2 = \|x\|^2$; ⟵[l'inégalité $\leq$ est toujours réalisée]

(iii) $\forall x \in E \quad (\langle x, e_i\rangle\, e_i)_{i\in I}$ sommable et $\sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle\, e_i = x$.

Proposition (« procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt »)

Soit E un espace préhilbertien sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ qui a une partie dénombrable dense $\{x_p\}_{p\in\mathbb{N}}$.

Il existe une famille libre $(v_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ de vecteurs de E, avec $\mathbb{N}' = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ou $\mathbb{N}' = \{1, ..., N\}$ pour un certain $N \in \mathbb{N}$, telle que $\operatorname{Vect}(v_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ est dense de E (par exemple extraite de $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$).(**)

On construit une base hilbertienne finie ou dénombrable $(e_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ de E ainsi :

$$w_n = v_n - \underbrace{\sum_{1\leq k\leq n-1} \langle v_n, e_k\rangle\, e_k}_{\text{projection orthogonale de } v_n \text{ sur } \operatorname{Vect}(v_1, \ldots, v_{n-1})} \quad \text{et} \quad e_n = \frac{w_n}{\|w_n\|} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}'.$$

Il s'agit de l'unique suite orthonormée $(e_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ dans E telle que :

$$\operatorname{Vect}(e_1, ..., e_n) = \operatorname{Vect}(v_1, ..., v_n) \quad \text{et} \quad \langle e_n, v_n\rangle \in \mathbb{R}^+ \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}'.$$

($*$) L'hypothèse « E est un espace préhilbertien et F est un sous-espace vectoriel complet de E » suffit.

($\star\star$) Par exemple : $v_n = x_{\alpha(n)}$ où $\alpha(n) = \inf\{p \in \mathbb{N} \mid (v_1, ..., v_{n-1}, x_p) \text{ libre}\}$.

Séries de Fourier : à retenir (J-Y D)

Soient $k \in \mathbb{N}$ et $p \in \{1,2\}$. On note : $\mathbb{T} = \overbrace{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}^{\text{groupe quotient}}$, $\mathscr{C}^k(\mathbb{T}) := \{f \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R}) \mid f \text{ est 1-périodique}\}$ et $\mathscr{L}^p(\mathbb{T}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ mesurable} \mid f \text{ est 1-périodique et } \|f\|_p := (\int_0^1 |f(t)|^p\, \mathrm{d}t)^{1/p} < +\infty\}$.

Rappel 1 (« théorème convergence uniforme + continuité »)

Soient Ω un espace topologique, $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ pour $n \in \mathbb{N}$, et $F : \Omega \to \mathbb{C}$, et $a \in \Omega$.

On suppose que
- f_n est continue en a pour chaque $n \in \mathbb{N}$;
- $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers F.

Alors F est continue en a.

Rappel 2 (« théorème convergence uniforme + différentiabilité »)

Soient Ω un ouvert convexe de $\mathbb{R}^N$ et $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

On suppose que
- f_n est différentiable pour chaque $n \in \mathbb{N}$;
- il existe $x_0 \in \Omega$ pour lequel la suite $(f_n(x_0))_{n\geq 0}$ converge ;
- la suite $(\mathrm{d}f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément.

Alors $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur toute partie bornée de Ω vers une fonction différentiable F telle que : $\mathrm{d}F(x)\cdot h = \lim\limits_{n\to+\infty} (\mathrm{d}f_n(x)\cdot h)$ pour $x \in \Omega$ et $h \in \mathbb{R}^N$.

Proposition

Soient $(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}\setminus\{0\}}$.

On pose : $\quad S_n(x) = a_0 + \sum\limits_{1\leq k\leq n} \big(a_k \cos(2\pi k x) + b_k \sin(2\pi k x)\big)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

(a) Si $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n| < +\infty$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |b_n| < +\infty$ alors $(S_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

en marge du programme

(b) Si $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ sont des suites de réels décroissantes de limite 0, alors $(S_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur tout compact de $]0,1[$.

(c) Si $(S_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$, vers une application notée f, alors $f \in \mathscr{C}(\mathbb{T})$ et, $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ se déduisent de f par les formules intégrales du (a) ci-dessous.

Définition

Soit $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$.

(a) On pose : $\quad \boxed{\widehat{f}(n) = \int_0^1 f(t)\, \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi n t}\, \mathrm{d}t}$ pour $n \in \mathbb{Z}$,

$a_0 = \int_0^1 f(t)\, \mathrm{d}t$, $a_n = 2\int_0^1 f(t)\cos(2\pi n t)\, \mathrm{d}t$ et $b_n = 2\int_0^1 f(t)\sin(2\pi n t)\, \mathrm{d}t$ pour $n \geq 1$.(*)

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle *somme partielle d'ordre n de la série de Fourier de f* la fonction $S_n(f)$ déterminée par : $\boxed{S_n(f)(x) = \sum\limits_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)\, \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi k x} = a_0 + \sum\limits_{1\leq k\leq n} (a_k \cos(2\pi k x) + b_k \sin(2\pi k x))}$.

complément

Théorème (« théorème de Riemann-Lebesgue »)

Soit $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$.

La « suite » $\widehat{f} := (\widehat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ appartient à $c_0(\mathbb{Z}) := \{(c_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} \mid \lim\limits_{n\to-\infty} c_n = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 0\}$.

Théorème

La transformation de Fourier $\mathcal{F}_{L^1(\mathbb{T})} : \begin{array}{ccc} L^1(\mathbb{T}) & \to & c_0(\mathbb{Z}) \\ f & \mapsto & \widehat{f} \end{array}$ est linéaire, injective et $\underbrace{\text{continue}}_{c_0(\mathbb{Z}) \text{ est muni de } \|\ \|_\infty}$.

(∗) Ainsi :
- $\widehat{f}(0) = a_0$, $\widehat{f}(n) = \frac{a_n - \mathrm{i}b_n}{2}$ et $\widehat{f}(-n) = \frac{a_n + \mathrm{i}b_n}{2}$ pour $n \geq 1$;
- $a_0 = \widehat{f}(0)$, $a_n \cos(2\pi n x) + b_n \sin(2\pi n x) = \widehat{f}(-n)\, \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi n x} + \widehat{f}(n)\, \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi n x}$ pour $n \geq 1$.

Théorème (« théorème de Fejér »)

Soit f un élément de $E := \mathscr{C}(\mathbb{T})$ muni de $\| \ \|_\infty$. $\longleftarrow$[cet énoncé reste valable en prenant $E := L^1(\mathbb{T})$ muni de $\| \ \|_1$]

La suite $\left(\frac{S_0(f)+\cdots+S_n(f)}{n+1}\right)_{n\geq 0}$ converge dans E vers f.

Remarques

(a) Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels. On pose $\sigma_n = \frac{u_0+\cdots+u_{n-1}}{n}$ pour $n \geq 1$.

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ alors $\sigma_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ « lemme de Cesàro ».

Soient $f \in \mathscr{C}(\mathbb{T})$ et $x_0 \in \mathbb{T}$. Si $(S_n(f)(x_0))_{n\geq 1}$ converge, on a donc $S_n(f)(x_0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x_0)$.

(b) Le th. de Fejér redonne la densité de l'algèbre des polynômes trigonométriques dans $\mathscr{C}(\mathbb{T})$ (conséquence du th. de Stone-Weierstrass) et l'injectivité de la transformation de Fourier.$^{(\star)}$

Théorème (« théorème de Dirichlet »)

Soient $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$ et $x_0 \in \mathbb{R}$.

On suppose que f vérifie les hypothèses suivantes (qui portent sur $f|_{\text{voisinage de } x_0}$) :

(i) f a des limites finies $f(x_0^-)$ à gauche en x_0 et $f(x_0^+)$ à droite en x_0 ;

(ii) $h > 0 \mapsto \frac{f(x_0-h)-f(x_0^-)}{h}$ et $h > 0 \mapsto \frac{f(x_0+h)-f(x_0^+)}{h}$ ont des limites finies en 0^+.

Alors $\boxed{S_n(f)(x_0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{f(x_0^-)+f(x_0^+)}{2}}$.$^{(\star\star)}$

Proposition

La famille $\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi n\cdot}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$.

Donc $\begin{array}{rccc}\mathcal{F}_{L^2(\mathbb{T})}\colon & L^2(\mathbb{T}) & \to & l^2(\mathbb{Z}) \\ & f & \mapsto & \big(\underbrace{\widehat{f}(n)}_{\langle f,\, \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi n\cdot}\rangle}\big)_{n\in\mathbb{Z}}\end{array}$ est $\underbrace{\text{une bijection de réciproque } \overline{\mathcal{F}}_{l^2(\mathbb{Z})}}_{\text{en particulier } S_n(f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f \text{ dans } L^2(\mathbb{T}) \text{ lorsque } f\in L^2(\mathbb{T})}$: $\begin{array}{ccc} l^2(\mathbb{Z}) & \to & L^2(\mathbb{T}) \\ (c_n)_{n\in\mathbb{Z}} & \mapsto & \underset{\text{sommable pour } \| \ \|_2}{\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\, \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi n\cdot}}\end{array}$

et on a $\boxed{\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{f}(n)\right|^2 = \int_0^1 |f(t)|^2\,\mathrm{d}t}$ pour tout $f \in L^2(\mathbb{T})$ « égalité de Bessel-Parseval ».

en marge du programme

Proposition

L'application $\begin{array}{rccc}\overline{\mathcal{F}}_{l^1(\mathbb{Z})}\colon & l^1(\mathbb{Z}) & \to & \mathscr{C}(\mathbb{T}) \\ & (c_n)_{n\in\mathbb{Z}} & \mapsto & \underset{\text{sommable pour } \| \ \|_\infty}{\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\, \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi n\cdot}}\end{array}$ est linéaire, injective et continue.$^{(\star\star\star)}$

De plus, toute $\underbrace{f \in \mathscr{C}(\mathbb{T}) \text{ telle que } \widehat{f} \in l^1(\mathbb{Z})}_{\text{par exemple } f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{T}), \text{ cf. la proposition ci-dessous}}$ vérifie $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\, \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi n\cdot}$ dans $\mathscr{C}(\mathbb{T})$. $\longleftarrow$[$\mathcal{F}$ injective]

Proposition

Soient $k \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathscr{C}^k(\mathbb{T})$. On a : $\boxed{\widehat{f^{(k)}}(n) = (2\mathrm{i}\pi n)^k\, \widehat{f}(n)}$ pour $n \in \mathbb{Z}$. $\longleftarrow$[penser à $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\, \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi nx}$]

En particulier : toute fonction $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{T})$ est somme de sa série de Fourier (car $\widehat{f} \in l^1(\mathbb{Z})$).

$(\star)$ Il redonne aussi le th. de Weierstrass : toute fonction $f \in \mathscr{C}([a,b])$ avec $a < b$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales. En effet, en introduisant l'unique $g \in \mathscr{C}(\mathbb{T})$ paire vérifiant $g(\frac{t}{2}) = f((1-t)a+tb)$ pour tout $t \in [0,1]$ et en fixant $\varepsilon > 0$, il existe $n \geq 0$ tel que $\|g - g_n\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ où $g_n := \frac{S_0(g)+\cdots+S_n(g)}{n+1}$, puis il existe une somme partielle P du développement en série entière de g_n en 0 telle que $\|(P-g_n)|_{[0,1]}\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$.

$(\star\star)$ Voici deux résultats difficiles à démontrer, relatifs à la « série de Fourier » $(S_n(f))_{n\geq 0}$ d'une fonction $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$:

(i) si $f \in \mathscr{L}^2(\mathbb{T})$, alors $(S_n(f))_{n\geq 0}$ converge presque partout vers f « théorème de Carleson-Hunt » (cas $p = 2$) ;

(ii) il existe $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$ tel que $(S_n(f))_{n\geq 0}$ diverge en tout point « contre exemple de Kolmogorov ».

$(\star\star\star)$ L'injectivité découle du (c) de la proposition du début, car pour toute suite $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l^1(\mathbb{Z})$, la fonction continue $f\colon x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\, \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi nx}$ vérifie $\widehat{f}(n) = c_n$ quand $n \in \mathbb{Z}$.