

Espaces de fonctions continues : à retenir (J-Y D)

Soient A un ensemble, (X, \mathcal{T}) un espace topologique, et (Y, d) un espace métrique.

penser à « (X, δ) un espace métrique »

Notations

(a) On note Y^A l'ensemble des applications de A dans Y .

(b) On note $\mathcal{C}(X, Y)$ l'ensemble des applications continues de X dans Y et $\mathcal{C}(X) = \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$.

(c) On note : $(Y^A)_b = \{f : A \rightarrow Y \mid \exists M \geq 0 \quad \forall x, y \in A \quad d(f(x), f(y)) \leq M\}$.

Les éléments de $(Y^A)_b$ s'appellent les *applications bornées de A dans Y* .

(d) On note $\mathcal{C}_b(X, Y) = \{f \in \mathcal{C}(X, Y) \mid f \text{ bornée}\}$ et $\mathcal{C}_b(X) = \mathcal{C}_b(X, \mathbb{C})$.

Définition-Proposition

On pose, quand f et g sont des applications de A dans Y :

$$d_\infty(f, g) := \sup_{x \in A} d(f(x), g(x)) \leq +\infty \quad \text{et} \quad d_u(f, g) := \min(d_\infty(f, g), 1).$$

(a) Les couples (Y^A, d_u) et $((Y^A)_b, d_\infty)$ sont des espaces métriques. De plus l'application identité de $(Y^A)_b$ est uniformément continue de $((Y^A)_b, d_\infty)$ dans $((Y^A)_b, d_u)$ et de $((Y^A)_b, d_u)$ dans $((Y^A)_b, d_\infty)$.

(b) On dit qu'une suite $(f_n)_{n \geq 0}$ d'applications de A dans Y *converge simplement* vers une application f de A dans Y si : $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(x)$ pour tout $x \in A$.

On exprimera cette convergence simple par : $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{simplement}} f$. (*)

(c) On dit qu'une suite $(f_n)_{n \geq 0}$ d'applications de A dans Y *converge uniformément* vers une application f de A dans Y si : $d_\infty(f_n, f) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$. Dans ce cas $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement vers f .

On exprimera cette convergence uniforme par : $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{uniformément}} f$. (**)

(d) La partie $(Y^A)_b$ de Y^A est fermée pour la distance d_u .

La partie $\mathcal{C}(X, Y)$ de Y^X est fermée pour la distance d_u .

(e) On dit qu'une suite $(f_n)_{n \geq 0}$ d'applications de X dans Y *converge uniformément sur tout compact* vers une application f de X dans Y si : $f_n|_K \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{uniformément}} f|_K$ pour tout compact K de X .

On exprimera cette convergence uniforme sur tout compact par : $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{uniformément sur les compacts}} f$. (***)

(f) On suppose que X est un ouvert de \mathbb{R}^p . Avec les notations du (e), on a :

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{uniformément sur les compacts}} f \iff \forall a \in X \quad \exists r > 0 \quad f_n|_{B_X(a, r)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{uniformément}} f|_{B_X(a, r)}.$$

Proposition (« critère de Cauchy uniforme »)

On suppose que Y est complet.

(a) L'espace métrique (Y^A, d_u) est complet.

(b) Une suite $(f_n)_{n \geq 0}$ d'applications de A dans Y converge uniformément vers une application f de A dans Y si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall p, q \in \mathbb{N} \quad (p \geq N \text{ et } q \geq N \implies \forall x \in A \quad d(f_p(x), f_q(x)) < \varepsilon).$$

(*) On a : $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{simplement}} f \iff \forall x \in A \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq N \implies d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon)$.

La condition « $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{simplement}} f$ » signifie que $(f_n)_{n \geq 0}$ converge vers f dans l'espace topologique $\prod_{x \in A} Y$. Les voisinages de f dans $\prod_{x \in A} Y$ sont les parties contenant un $\{g \in Y^A \mid \max_{1 \leq i \leq n} d(g(x_i), f(x_i)) < \varepsilon\}$ avec $x_1, \dots, x_n \in A$ et $\varepsilon > 0$.

(**) On a : $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{uniformément}} f \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq N \implies \forall x \in A \quad d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon)$.

La condition « $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{uniformément}} f$ » signifie que $(f_n)_{n \geq 0}$ converge vers f dans l'espace métrique (Y^A, d_u) .

(***) La condition « $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{uniformément sur les compacts}} f$ » signifie que $(f_n)_{n \geq 0}$ converge vers f pour la topologie sur Y^X où les voisinages de f sont les parties contenant un $\{g \in Y^A \mid d_\infty(g|_K, f|_K) < \varepsilon\}$ avec K compact de X et $\varepsilon > 0$.

Définition

- (a) On dit que X est séparable s'il existe une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ de points de X d'image $\{x_n\}_{n \geq 0}$ dense.
- (a) On dit que X est à base dénombrable s'il existe une suite $(U_n)_{n \geq 0}$ de parties de X telle que les ouverts de X sont les réunions de certains U_n , $n \in \mathbb{N}$.
- (b) On dit qu'une partie U de X est relativement compacte dans X si \bar{U} est compacte.
- (c) On dit que Y est précompact si : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \exists y_1, \dots, y_n \in Y \quad Y \subseteq B(y_1, \varepsilon) \cup \dots \cup B(y_n, \varepsilon)$.

Proposition

- (a) Tout espace métrique compact est séparable.
- (b) Un espace métrique est séparable si et seulement si il est à base dénombrable.
- (c) Un espace métrique est compact si et seulement si il est précompact et complet.

Définition

Soit H une partie de Y^X . On dit que H est équicontinue en un point x_0 de X si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists V \underset{\text{voisinage de } x_0}{\subseteq} X \quad \forall x \in X \quad (x \in V \implies \forall h \in H \quad d(h(x), h(x_0)) < \varepsilon).$$

Dans le cas où X est un espace métrique, cela équivaut à :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in X \quad (d(x, x_0) < \alpha \implies \forall h \in H \quad d(h(x), h(x_0)) < \varepsilon).$$

On dit que H est équicontinue si elle est équicontinue en tout point de X .^(*)

Théorème (« théorème d'Arzelà-Ascoli »)

Soit H une partie de l'ensemble Y^X des applications de X dans Y .

On note : $H(x) = \{h(x) ; h \in H\}$ pour tout $x \in X$.

On suppose que X est compact, ce qui permet de munir $\mathcal{C}(X, Y)$ de la distance d_∞ .

Si H est équicontinue et les parties $H(x)$ de Y , $x \in X$, sont relativement compactes, alors H est relativement compacte dans $\mathcal{C}(X, Y)$.^(**)

Définition

Soit H un ensemble d'applications de X dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . On dit que :

- H est une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X, \mathbb{K})$ si H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(X, \mathbb{K})$ stable par produit ;
- H est auto-conjuguée si H est stable par passage aux applications conjuguées ;
- H est séparante (ou « sépare les points ») si pour tous $x, y \in X$, il existe $h \in H$ tel que $h(x) \neq h(y)$;
- H contient les constantes si H contient l'ensemble des applications constantes de X dans \mathbb{K} .

Théorème (« théorème de Stone-Weierstrass »)

On suppose que X est compact, ce qui permet de munir $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ et $\mathcal{C}(X)$ de la distance d_∞ .

(a) Si H est une sous-algèbre séparante de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ qui contient les constantes, alors H est dense dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

(b) Si H est une sous-algèbre auto-conjuguée séparante de $\mathcal{C}(X)$ qui contient les constantes, alors H est dense dans $\mathcal{C}(X)$.

Corollaire (« théorème de Weierstrass »)

L'espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles (resp. complexes) sur un segment $[a, b]$ de \mathbb{R} est dense dans $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{C}([a, b])$) muni de la norme de la convergence uniforme.

(*) Par abus, on dira qu'une suite $(f_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de Y^X est équicontinue si son image $\{f_n\}_{n \geq 0}$ est équicontinue.

(**) La réciproque, peu utile, est vraie. Elle découle du fait que l'espace métrique \bar{H} est précompact lorsque H est relativement compacte, et que les applications $h \mapsto h(x_0)$ sont 1-lipschitziennes.

Applications linéaires continues : à retenir (J-Y D)

Soient E, F , et G des espaces vectoriels sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Définition

(a) Une *norme* sur E est une application $N: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant :

(i) $\forall v \in E \quad N(v) = 0 \iff v = 0$;

(ii) $\forall v \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad N(\lambda v) = |\lambda| N(v)$;

(iii) $\forall v, w \in E \quad N(v + w) \leq N(v) + N(w)$ (« inégalité triangulaire »).

(b) On dit que deux normes N_1 et N_2 sur E sont *équivalentes* si :

$$\exists \alpha, \beta > 0 \quad \alpha N_1 \leq N_2 \leq \beta N_1. \quad \leftarrow [\text{c-à-d } \frac{N_1}{N_2} \text{ et } \frac{N_2}{N_1} \text{ bornées sur } E \setminus \{0\}]$$

(c) La *distance* associée à une norme N sur E est l'application $d: E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par :

$$\forall x, y \in E \quad d(x, y) := N(x - y).$$

Exemples

(a) Soit A un ensemble. On définit une norme $\| \cdot \|_\infty$ sur l'espace vectoriel $(\mathbb{K}^A)_b$ formé des applications bornées de A dans \mathbb{K} en posant : $\|f\|_\infty := \sup_{x \in A} |f(x)|$ pour tout $f \in (\mathbb{K}^A)_b$.

(b) On suppose que $(E, \| \cdot \|)$ est un espace vectoriel normé.

« Le » complété \tilde{E} de E a une structure d'espace vectoriel normé qui prolonge celle de E .

Définition-Proposition

On se donne des normes $\| \cdot \|_E$ et $\| \cdot \|_F$ sur E et F . L'espace vectoriel $E \times F$ est muni de la *norme 2 du produit* $\| \cdot \|_{E \times F}$ définie par : $\|(v, w)\|_{E \times F} := \sqrt{\|v\|_E^2 + \|w\|_F^2}$ pour tout $(v, w) \in E \times F$.^(*)

Proposition

On se donne des normes $\| \cdot \|_E, \| \cdot \|_F, \| \cdot \|_G$ sur E, F, G .

(a) Une application linéaire $u: E \rightarrow F$ est continue si et seulement s'il existe $k \geq 0$ tel que :

$$\|u(x)\|_F \leq k \|x\|_E \text{ pour tout } x \in E.$$

(b) Une application bilinéaire $\pi: E \times F \rightarrow G$ est continue si et seulement s'il existe $k \geq 0$ tel que :

$$\|\pi(x, y)\|_G \leq k \|x\|_E \|y\|_F \text{ pour tout } (x, y) \in E \times F.$$

(c) La somme de $E \times E$ dans E et la multiplication par un scalaire de $\mathbb{K} \times E$ dans E sont des applications continues (cas particuliers respectivement de (a) et de (b)).

(d) Lorsque E est de dimension finie : toute application linéaire de E dans F est continue.

Théorème (« théorème de Riesz »)

On se donne une norme $\| \cdot \|_E$ sur E .

La boule unité fermée de E est compacte si et seulement si E est de dimension finie.

Définition-Proposition

On se donne des normes $\| \cdot \|_E, \| \cdot \|_F$, et $\| \cdot \|_G$ sur E, F , et G .

(a) On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace vectoriel formé des applications linéaires continues de E dans F . On pose : $E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. C'est le sous-espace vectoriel de E^* formé des formes linéaires continues.

(b) On appelle *norme subordonnée* à $\| \cdot \|_E$ et $\| \cdot \|_F$ la norme $\| \cdot \|$ sur $\mathcal{L}(E, F)$ définie par :

$$\|u\| := \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} \text{ pour tout } u \in \mathcal{L}(E, F)^{(**)}. \quad \leftarrow [\text{on note } \sup \emptyset = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^+]$$

En particulier, on a : si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $x \in E$, alors $\|u(x)\|_F \leq \|u\| \|x\|_E$.

(c) Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$, alors $v \circ u \in \mathcal{L}(E, G)$ et $\|v \circ u\| \leq \|v\| \|u\|$.

(*) Comme les normes $\| \cdot \|_1, \| \cdot \|_2$, et $\| \cdot \|_\infty$ sur \mathbb{R}^2 sont équivalentes, cette norme $\| \cdot \|_{E \times F}$ est équivalente aux normes $(v, w) \mapsto \|v\|_E + \|w\|_F$ et $(v, w) \mapsto \max(\|v\|_E, \|w\|_F)$ sur $E \times F$.

(**) Le nombre $\|u\|$ est donc le plus petit réel $k \geq 0$ vérifiant : $\|u(x)\|_F \leq k \|x\|_E$ pour tout $x \in E$.

Proposition

On suppose que F est un espace de Banach.

(a) L'espace vectoriel normé $(\mathcal{L}(E, F), \|\cdot\|)$ est un espace de Banach.

(b) Soit D un sous-espace vectoriel dense de E .

Tout $u \in \mathcal{L}(D, F)$ a un unique prolongement $\tilde{u} \in \mathcal{L}(E, F)$; de plus $\|\tilde{u}\| = \|u\|$.

Définition

On dit qu'un espace topologique X est *de Baire* s'il vérifie l'une des propriétés équivalentes :

(i) toute réunion $\bigcup_{n \geq 0} F_n$ d'une suite $(F_n)_{n \geq 0}$ de fermés d'intérieurs vides est d'intérieur vide;

(ii) toute intersection $\bigcap_{n \geq 0} U_n$ d'une suite $(U_n)_{n \geq 0}$ d'ouverts denses dans X est dense dans X .

Théorème (« théorème de Baire »)

Tout espace métrique complet est de Baire.

Théorème (« théorème de Banach-Steinhaus »)

On suppose que E est un espace de Banach.

(a) Soit $A \subseteq \mathcal{L}(E, F)$. Si $\sup_{T \in A} \|T(x)\| < +\infty$ pour tout $x \in E$, alors $\sup_{T \in A} \|T\| < +\infty$.

(b) Si $f_n \in \mathcal{L}(E, F)$, $n \geq 0$, vérifient $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{simplement}} f$, alors $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\|f\| \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\| < +\infty$.

Définition

On dit qu'une application f d'un espace topologique X dans un espace topologique Y est *ouverte* si pour tout ouvert \mathcal{O} de X , la partie $f(\mathcal{O})$ de Y est ouverte.

Théorème (« théorème de l'application ouverte »)

On suppose que E et F sont des espaces de Banach.

Toute application linéaire continue surjective de E sur F est ouverte.

En particulier toute application linéaire continue bijective de E sur F a une réciproque continue.

Théorème (« théorème du graphe fermé »)

On suppose que E et F sont des espaces de Banach.

Soit $f: E \rightarrow F$ une application linéaire.

On appelle *graphe de f* la partie $\Gamma(f) := \{(x, y) \in E \times F \mid y = f(x)\}$ de $E \times F$.

L'application linéaire f est continue si et seulement si son graphe est fermé dans $E \times F$.

Espaces L^p et convolution : à retenir (J-Y D)

On fixe un espace mesuré (X, \mathcal{A}, μ) , un ensemble I , $d \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p, p' \leq +\infty$ vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Rappels

(a) Pour toute suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, on a :

$$\int_X \underbrace{\liminf_{n \rightarrow +\infty} \inf_{k \geq n} f_k(x)}_{\text{mesurable en } x} d\mu(x) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_X \inf_{k \geq n} f_k(x) d\mu(x) \quad \text{« lemme de Fatou ».}$$

(b) Pour toute suite *croissante* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, on a :

$$\int_X \underbrace{\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)}_{\text{mesurable en } x} d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n(x) d\mu(x) \quad \text{« théorème de convergence monotone ».}$$

Définition-Proposition ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C})

(a) On dira qu'une propriété portant sur $x \in X$ est vérifiée *μ -presque partout* si l'ensemble des points x qui ne la vérifient pas est inclus dans une partie mesurable A telle que $\mu(A) = 0$.

(b) Pour toute application mesurable $f: X \rightarrow \mathbb{C}$, on note :

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \leq +\infty \quad \text{si } p < +\infty$$

$$\text{et } \|f\|_\infty := \min \{ M \geq 0 \mid |f(x)| \leq M \text{ } \mu\text{-presque partout} \} \leq +\infty \quad \text{où } \min \emptyset := +\infty.$$

Lorsque X est un ouvert de \mathbb{R}^d , muni de dx , et $f \in \mathcal{C}(X)$, on a en ce sens : $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$.

(c) On note $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu) := \{f: X \rightarrow \mathbb{K} \text{ mesurable} \mid \|f\|_p < +\infty\}$ et $L_{\mathbb{K}}^p(\mu) := \mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu) / \mathcal{N}_\mu^{(*)}$ où \mathcal{N}_μ est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu)$ formé des fonctions mesurables nulles μ -presque partout.

On pose : $l_{\mathbb{K}}^p(I) := L_{\mathbb{K}}^p(I, \mathcal{P}(I), \text{comptage})$ et $L_{\mathbb{K}}^p(\mathbb{R}^d) := L_{\mathbb{K}}^p(\mathbb{R}^d, \text{Borel}, dx) \xrightarrow{\text{can}} L_{\mathbb{K}}^p(\mathbb{R}^d, \text{Lebesgue}, dx)$.

Ainsi, quand $p < +\infty$: $l_{\mathbb{K}}^p(I) = \{(a_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I \mid \sum_{i \in I} |a_i|^p < +\infty\}$ et $\|(a_i)_{i \in I}\|_p = \left(\sum_{i \in I} |a_i|^p \right)^{1/p}$.

(d) La famille $(l_{\mathbb{K}}^k(I))_{1 \leq k \leq +\infty}$ croît, et, la famille $(L_{\mathbb{K}}^k(\mu))_{1 \leq k \leq +\infty}$ décroît lorsque $\mu(X) < +\infty$.

On a : $l^p := l_{\mathbb{C}}^p(\mathbb{N})$ est séparable si et seulement si $p < +\infty$.

Pour Ω ouvert non-vidé de \mathbb{R}^d , on a : $L^p(\Omega) := L_{\mathbb{C}}^p(\Omega, dx)$ est séparable si et seulement si $p < +\infty$.

Proposition

Soient $f, g: X \rightarrow \mathbb{C}$ deux applications mesurables.

(a) On a : $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \leq +\infty$ « inégalité de Minkowski ».

[Si $1 < p < +\infty$ et $f, g \in L_{\mathbb{C}}^p(\mu)$, on a : $\|f + g\|_p = \|f\|_p + \|g\|_p$ si et seulement si il existe $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}^+)^2 \setminus \{0\}$ tel que $\alpha f(x) = \beta g(x)$ p. p.]

(b) On a : $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'} \leq +\infty$ « inégalité de Hölder ».

[Si $1 < p < +\infty$, $f \in L_{\mathbb{C}}^p(\mu)$ et $g \in L_{\mathbb{C}}^{p'}(\mu)$, on a : $\|fg\|_1 = \|f\|_p \|g\|_{p'}$ si et seulement si il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ tel que $\alpha |f(x)|^p + \beta |g(x)|^{p'} = 0$ p. p.]

Théorème (« théorème de Riesz-Fischer »)

(a) L'espace vectoriel $L^p(\mu) := L_{\mathbb{C}}^p(\mu)$ muni de $f \mapsto \|f\|_p$ est un espace de Banach.

En particulier $L^2(\mu)$ muni de $f \mapsto \|f\|_2$ est un espace de Hilbert.

(b) Si $(f_n)_{n \geq 0}$ converge vers f dans $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^p(\mu) := L_{\mathbb{C}}^p(\mu)$, alors $(f_n)_{n \geq 0}$ a une suite extraite $(f_{n_k})_{k \geq 0}$ qui converge simplement presque partout vers f .

← [on peut prendre $(f_{n_k})_{k \geq 0} = (f_n)_{n \geq 0}$ quand $p = +\infty$]

(*) Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} et F un sous-espace vectoriel de E .

On pose $\underbrace{\dot{x}} := \{x + y; y \in F\}$ quand $x \in E$, puis $E/F := \{\dot{x}; x \in E\}$.

« classe de x »

L'ensemble E/F muni des « lois » portant sur $u, v \in E/F$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ déterminées par les égalités

(i) $u + v := \widehat{x + y}$ indépendamment du choix d'éléments x, y de E tels que $u = \dot{x}$ et $v = \dot{y}$

(ii) $\alpha \times u := \widehat{\alpha x}$ indépendamment du choix d'un élément x de E tel que $u = \dot{x}$

est un \mathbb{K} -espace vectoriel, appelé *\mathbb{K} -espace vectoriel quotient de E par F* .

Théorème

On peut définir l'application linéaire suivante : $L^{p'}(\mu) \xrightarrow{\text{dual topologique de } L^p(\mu)} (L^p(\mu))'$.

$$g \mapsto (f \mapsto \int_X fg \, d\mu)$$

Quand $p < +\infty$ et μ est σ -finie : elle conserve la norme et est bijective.^(*)

Quand $p = +\infty$: elle conserve la norme, mais n'est pas surjective dans le cas de $l^1 \hookrightarrow (l^\infty)'$.

Définition-Proposition

On fixe un ouvert Ω de \mathbb{R}^d .

(a) On note $\mathcal{L}^{p,loc}(\Omega)$ l'ensemble des applications mesurables f de Ω dans \mathbb{C} dont la restriction à toute boule fermée \tilde{B} de \mathbb{R}^d incluse dans Ω appartient à $\mathcal{L}^p(\tilde{B})$. Il contient $\mathcal{C}(\Omega)$.

(b) Soit $f \in \mathcal{L}^{1,loc}(\Omega)$. Le support $\text{Supp } f$ de f est le plus petit fermé de Ω hors duquel f s'annule presque partout. Quand f est continue, $\text{Supp } f$ est donc l'adhérence dans Ω de $\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}$.

(c) On note $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega) := \{f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \mid \text{Supp } f \text{ compact}\}$.

(d) On note : $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d) := \{f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C} \mid f(x) \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} 0\} \subseteq L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Définition-Proposition

On se donne $1 \leq q \leq +\infty$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$. Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$.

(a) On peut définir pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$: $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)g(t) \, dt$.

On a : $g * f = f * g$ et $\text{Supp}(f * g) \subseteq \overline{\text{Supp } f + \text{Supp } g}$.

(b) On a : $f * g \in L^r(\mathbb{R}^d)$ et $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$ où $\frac{1}{r} := \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$ « théorème de Young ».

En particulier : $L^1(\mathbb{R}^d) * L^p(\mathbb{R}^d) \subseteq L^p(\mathbb{R}^d)$ et $L^p(\mathbb{R}^d) * L^{p'}(\mathbb{R}^d) \subseteq L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

(c) Lorsque $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $v \in L^{p'}(\mathbb{R}^d)$, on a : $u * v$ est définie sur \mathbb{R}^d avec $\|(u * v)\|_\infty \leq \|u\|_p \|v\|_{p'}$, $u * v$ est uniformément continue, et $u * v \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ quand $1 < p < +\infty$.

(d) Soit $1 \leq s \leq +\infty$ tel que $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1) + \frac{1}{s} \geq 1$. On a : $(f * g) * h = f * (g * h)$ pour $h \in L^s(\mathbb{R}^d)$. En particulier, $(L^1(\mathbb{R}^d), +, *)$ est une algèbre associative et commutative.

(e) Si $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $v \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^d)$, on a : $u * v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$ et $\frac{\partial}{\partial x_k}(u * v) = u * \frac{\partial v}{\partial x_k}$ quand $1 \leq k \leq d$.

Définition-Proposition

(a) On dit qu'une suite $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{L}_\mathbb{R}^1(\mathbb{R}^d)$ est une approximation de l'unité si :

- (i) $\alpha_n \geq 0$ et $\int_{\mathbb{R}^d} \alpha_n(t) \, dt = 1$ pour tout $n \geq 0$; existe, cf. $\alpha_n(x) = n^d \alpha(nx)$ avec $\alpha \in \mathcal{L}_\mathbb{R}^1(\mathbb{R}^d)$, $\alpha \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^d} \alpha(t) \, dt = 1$.
- (ii) $\int_{\{\|t\| \geq \varepsilon\}} \alpha_n(t) \, dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ pour tout $\varepsilon > 0$.

Dans ce cas, si $p < +\infty$: $\forall f \in L^p(\mathbb{R}^d) \quad f * \alpha_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^p(\mathbb{R}^d)} f$ et $\forall f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d) \quad f * \alpha_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^\infty(\mathbb{R}^d)} f$.

(b) On dit qu'une suite $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ est une suite régularisante si :

- (i) $\alpha_n \geq 0$ et $\int_{\mathbb{R}^d} \alpha_n(t) \, dt = 1$ pour tout $n \geq 0$; existe, cf. $\alpha_n(x) = n^d \alpha(nx)$ avec $\alpha(x) = k \exp(-\frac{1}{1-\|x\|^2}) \mathbb{1}_{[0,1[}(\|x\|)$
- (ii) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\text{Supp } \alpha_n \subseteq B(0, \varepsilon)$ dès que $n \geq N$.

Dans ce cas $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ est une approximation de l'unité et $f * \alpha_n$ est C^∞ quand $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$.

Proposition

(a) Si $p < +\infty$: $\text{Vect}(\mathbb{1}_A)_{A \in \mathcal{A} \text{ et } \mu(A) < +\infty}$ est dense dans $L^p(\mu)$.

(b) L'espace vectoriel $\text{Vect}(\mathbb{1}_A)_{A \in \mathcal{A}}$ des fonctions étagées est dense dans $L^\infty(\mu)$.

(c) Si $p < +\infty$ et J est un intervalle : $\text{Vect}(\mathbb{1}_{[a,b]})_{a,b \in J}$ est dense dans $L^p(J)$.

Si $p < +\infty$ et Ω est un ouvert de \mathbb{R}^d : $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$.

(d) L'adhérence de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ est égale à $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$.

(*) Lorsque $1 < p < +\infty$, on peut enlever « σ -finie », cf. [Real and Abstract Analysis](#) de Hewitt et Stromberg, p. 231.

Espaces de Hilbert : à retenir (J-Y D)

On se place sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Définition

On se donne un espace vectoriel E .

On appelle *produit scalaire sur E* une application $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ de E^2 dans \mathbb{K} telle que

- (i) l'application $x \mapsto \langle x, y \rangle$ est linéaire pour tout $y \in E$;
- (ii) on a : $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$ pour tous $x, y \in E$;
- (iii) on a : $\langle x, x \rangle \geq 0$ et $(\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0)$ pour tout $x \in E \setminus \{0\}$.

Dans ce cas l'*orthogonal* d'une partie A de E est : $A^\perp := \{x \in E \mid \forall a \in A \langle x, a \rangle = 0\}$.

Définition-Proposition

(a) On appelle *espace préhilbertien* un espace vectoriel E muni d'un produit scalaire.

Dans ce cas, $x \in E \mapsto \|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} \in \mathbb{R}^+$ est une norme sur E et pour tous $x, y \in E$, on a :

- $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ « inégalité de Cauchy-Schwarz » ;
- $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\| \iff (x, y)$ liée ;
- $4\langle x, y \rangle = \begin{cases} \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 & \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{R} \\ \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2 & \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{C} \end{cases}$ « identité de polarisation ».

(b) On appelle *espace de Hilbert* un espace préhilbertien qui est complet.

Exemples

Soient I un ensemble et (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré.

(a) L'espace vectoriel $l_{\mathbb{K}}^2(I)$ muni de $\langle (a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I} \rangle := \sum_{i \in I} a_i \overline{b_i}$ est un espace de Hilbert.

(b) L'espace vectoriel $L_{\mathbb{K}}^2(\mu)$ muni de $\langle f, g \rangle := \int_X f(t) \overline{g(t)} d\mu(x)$ est un espace de Hilbert.

Proposition

Soient E un espace de Hilbert et C un convexe fermé non-vidé de E .

(a) Pour tout $x \in E$, il existe un unique $x_0 \in C$ tel que : $d(x, x_0) = d(x, C)$.

On notera $p_C(x) := x_0$ et dira que $p_C(x)$ est la *projection de x sur le convexe C* .

(b) Soit $x \in E$. Le vecteur $p_C(x)$ est l'unique $x_0 \in C$ vérifiant : $\operatorname{Re} \langle \overrightarrow{x_0 x}, \overrightarrow{x_0 c} \rangle \leq 0$ pour $c \in C$.

(c) L'application $p_C : E \rightarrow C$ est 1-lipschitzienne.

Proposition

Soient E un espace de Hilbert et F un sous-espace vectoriel fermé de E .

(a) Pour tout $A \subseteq E$, la partie A^\perp est un sous-espace vectoriel fermé de E .

(b) Soit $x \in E$. Le vecteur $p_F(x)$ est l'unique $y \in F$ tel que $x - y \in F^\perp$.

(c) On a : $(F^\perp)^\perp = F$ et $F \oplus F^\perp = E$.

En particulier, pour tout $A \subseteq E$, on a : $\overline{\operatorname{Vect} A} = E \iff A^\perp = \{0\}$. ← [remarquer que $(\overline{\operatorname{Vect} A})^\perp = A^\perp$]

(d) Ainsi la projection $p_F : E \rightarrow F$ de E sur le convexe F est la restriction de la projection linéaire $\widetilde{p}_F : E \rightarrow E$ de E sur F parallèlement au sous-espace vectoriel fermé F^\perp de E .

Théorème (« théorème de représentation de Riesz »)

Soit E un espace de Hilbert.

On note E' l'espace vectoriel normé formé des applications linéaires continues de E dans \mathbb{K} .

L'application \mathbb{R} -linéaire $E \rightarrow E'$ est bijective et conserve la norme.

$$y \mapsto \langle \cdot, y \rangle$$

Définition-Proposition

Soit E un espace de Hilbert.

(a) Soient $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de E et $l \in E$. On dit que $(x_n)_{n \geq 0}$ converge faiblement dans E vers l , et note $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$, si pour tout $y \in E$, on a : $\langle x_n, y \rangle \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \langle l, y \rangle$.

(b) Toute suite bornée dans E a une suite extraite qui converge faiblement dans E .

Définition

Soient E un espace vectoriel normé et I un ensemble.

Soient $(a_i)_{i \in I} \in E^I$ et $a \in E$. On note $\mathcal{P}_f(I)$ l'ensemble des parties finies de I .

On dit que la famille $(a_i)_{i \in I}$ est *sommable* de somme a si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists J \in \mathcal{P}_f(I) \quad \forall J' \in \mathcal{P}_f(I) \quad \left(J' \supseteq J \implies \left\| \sum_{j' \in J'} a_{j'} - a \right\| < \varepsilon \right)$$

Dans ce cas, on note : $\sum_{i \in I} a_i = a$. ← [en particulier : $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ si $I = \mathbb{N}$ et $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}$ si $I = \mathbb{Z}$]

Définition

Soient E un espace préhilbertien, et $(e_i)_{i \in I}$ une famille orthonormée dans E .

On dit que la famille orthonormée $(e_i)_{i \in I}$ est une base hilbertienne de E si elle vérifie l'une des trois propriétés équivalentes (i), (ii) et (iii) suivantes :

(i) $\text{Vect}\{e_i\}_{i \in I} = E$;

(ii) $\forall x \in E \quad \sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2 = \|x\|^2$ « égalité de Parseval » ; ← [l'« inégalité de Bessel » \leq est toujours réalisée]

(iii) $\forall x \in E \quad (\langle x, e_i \rangle e_i)_{i \in I}$ est sommable et $\sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i = x$.

Exemples

(a) L'espace de Hilbert $l_{\mathbb{K}}^2(I)$ admet pour base hilbertienne la famille $(\delta_i)_{i \in I}$ définie par :

$$\delta_i(j) = 0 \quad \text{si } j \neq i \quad \text{et} \quad \delta_i(i) = 1.$$

(b) L'espace de Hilbert $L_{\mathbb{C}}^2([0, 1])$ admet pour base hilbertienne la famille $(e^{2i\pi n})_{n \in \mathbb{Z}}$.

Théorème

Soit E un espace de Hilbert.

(a) L'espace de Hilbert E possède une base hilbertienne $(e_i)_{i \in I}$. (*)

Dans ce cas $E \rightarrow l_{\mathbb{K}}^2(I)$ est une bijection de réciproque $l_{\mathbb{K}}^2(I) \rightarrow E$ avec $\sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2 = \|x\|^2$.
 $x \mapsto (\langle x, e_i \rangle)_{i \in I}$ $(a_i)_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} a_i e_i$

(b) Toutes les bases hilbertiennes de E ont même cardinal.

On appelle *dimension hilbertienne* de E ce cardinal.

Proposition (« procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt »)

Soit E un espace préhilbertien qui a une partie dénombrable dense $\{x_p\}_{p \in \mathbb{N}}$.

Il existe une famille libre $(v_n)_{n \in \mathbb{N}'}$ de vecteurs de E , avec $\mathbb{N}' = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ou $\mathbb{N}' = \{1, \dots, N\}$ pour un certain $N \in \mathbb{N}$, telle que $\text{Vect}(v_n)_{n \in \mathbb{N}'}$ est dense de E (par exemple extraite de $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$). (**)

On construit une base hilbertienne finie ou dénombrable $(e_n)_{n \in \mathbb{N}'}$ de E ainsi :

$$w_n = v_n - \underbrace{\sum_{1 \leq k \leq n-1} \langle v_n, e_k \rangle e_k}_{\text{projection orthogonale de } v_n \text{ sur } \text{Vect}(v_1, \dots, v_{n-1})} \quad \text{et} \quad e_n = \frac{w_n}{\|w_n\|} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}'.$$

Il s'agit de l'unique suite orthonormée $(e_n)_{n \in \mathbb{N}'}$ dans E telle que :

$$\text{Vect}(e_1, \dots, e_n) = \text{Vect}(v_1, \dots, v_n) \quad \text{et} \quad \langle e_n, v_n \rangle \in \mathbb{R}^+ \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}'.$$

(*) Il existe un espace préhilbertien (sans partie dénombrable dense) qui n'a aucune base hilbertienne. Un contre-exemple se trouve dans Bourbaki, [Espaces vectoriels topologiques](#), chapitre V, §2, exercice 2.

(**) Par exemple : $v_n = x_{\alpha(n)}$ où $\alpha(n) = \inf\{p \in \mathbb{N} \mid (v_1, \dots, v_{n-1}, x_p) \text{ libre}\}$.

Transformée de Fourier sur \mathbb{R}^m : à retenir (J-Y D)

Définition-Proposition

(a) Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^m)$. On pose : $\mathcal{F}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x) e^{-i\xi \cdot x} dx$ et $\overline{\mathcal{F}}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x) e^{i\xi \cdot x} dx$ ($\xi \in \mathbb{R}^m$).

La fonction $\mathcal{F}f$, notée aussi \widehat{f} , appartient à $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m) := \left\{ g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^m) \mid g(\xi) \xrightarrow{\|\xi\| \rightarrow +\infty} 0 \right\}$.

(b) L'application linéaire $\mathcal{F}_{L^1(\mathbb{R}^m)} : L^1(\mathbb{R}^m) \rightarrow \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m)$ est injective et continue.
 $f \mapsto \widehat{f}$ $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m)$ est muni de $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$

(c) Si $f \in L^1(\mathbb{R}^m)$ est telle que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^m)$, on a :

$$f(x) = (2\pi)^{-m} \overline{\mathcal{F}}\widehat{f}(x) \text{ presque partout } \ll \text{théorème de réciprocity} \gg.$$

Définition-Proposition

On prolonge $\mathcal{F}|_{L^1(\mathbb{R}^m) \cap L^2(\mathbb{R}^m)}$ à $L^2(\mathbb{R}^m)$ (argument de densité) en une bijection linéaire

$$\mathcal{F}_{L^2(\mathbb{R}^m)} : L^2(\mathbb{R}^m) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^m)$$

$$f \longmapsto \widehat{f} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \left(\xi \mapsto \int_{\|x\| \leq r} f(x) e^{-i\xi \cdot x} dx \right)$$

dans $L^2(\mathbb{R}^m)$

dont la réciproque est

$$(2\pi)^{-m} \overline{\mathcal{F}}_{L^2(\mathbb{R}^m)} : L^2(\mathbb{R}^m) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^m)$$

$$f \longmapsto \lim_{r \rightarrow +\infty} \left(x \mapsto (2\pi)^{-m} \int_{\|\xi\| \leq r} f(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi \right)$$

dans $L^2(\mathbb{R}^m)$

Elle vérifie : $\int_{\mathbb{R}^m} |f(x)|^2 dx = (2\pi)^{-m} \int_{\mathbb{R}^m} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi$ quand $f \in L^2(\mathbb{R}^m)$.

Remarque

On pose $\check{f}(x) = f(-x)$ et $\tau_a f(x) = f(x - a)$ pour $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{R}^m$ et tout $x \in \mathbb{R}^m$.

(a) Les applications $f \rightarrow \check{f}$ et $f \rightarrow \tau_a(f)$ passent aux quotients modulo l'égalité presque partout.

(b) Soit $p \in \{1, 2\}$. Pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^m)$, on a :

$$\mathcal{F}\check{f} = (\mathcal{F}f)^\vee = \overline{\mathcal{F}}f, \quad \widehat{\tau_a f}(\xi) = e^{-i\xi \cdot a} \widehat{f}(\xi) \text{ et } (\tau_a \widehat{f})(\xi) = (e^{ixa} f)^\wedge(\xi) \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{R}^m.$$

En particulier \widehat{f} est paire (respectivement impaire) lorsque f est paire (respectivement impaire).

Proposition

On a : $\widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g}$ quand $f, g \in L^1(\mathbb{R}^m)$.

On retrouve le fait que le produit de convolution $*$ sur $L^1(\mathbb{R}^m)$ est commutatif et associatif.

Proposition

Pour tout $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{N}^m$, on note :

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_m, \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_m^{\alpha_m}, \text{ et } D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_m^{\alpha_m}}.$$

(a) Si $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^m)$, et $D^\alpha f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m)$ quand $|\alpha| \leq k$, on a :

$$(D^\alpha f)^\wedge(\xi) = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \widehat{f}(\xi) \text{ pour } |\alpha| \leq k \text{ et } \xi \in \mathbb{R}^m, \text{ donc } \widehat{f}(\xi) = o\left(\frac{1}{\|\xi\|^k}\right)^{(*)}.$$

[Utiliser ce qui suit : si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et $f' \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, alors $f(x) = \int_0^x f'(t) dt + f(0)$ a des limites quand $x \rightarrow -\infty$ et quand $x \rightarrow +\infty$.]

En particulier : si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ avec $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $f' \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, alors $f = \frac{1}{2\pi} \overline{\mathcal{F}}\widehat{f}$.

(b) Si $x^\alpha f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m)$ quand $|\alpha| \leq k^{(**)}$, on a :

$$\widehat{f} \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^m) \text{ et } D^\alpha \widehat{f}(\xi) = ((-i)^{|\alpha|} x^\alpha f)^\wedge(\xi) \text{ pour } |\alpha| \leq k \text{ et } \xi \in \mathbb{R}^m.$$

(*) Comme \widehat{f} est par ailleurs continue, on a donc : $\sup_{\xi \in \mathbb{R}^m} |(1 + \|\xi\|^2)^{\frac{k}{2}} \widehat{f}(\xi)| < +\infty$.

(**) Cette hypothèse signifie que $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{C}$ est mesurable et $\int_{\mathbb{R}^m} |(1 + \|x\|^2)^{\frac{k}{2}} f(x)| dx < +\infty$.

Exemple

On a : $\mathcal{F}(x \mapsto e^{-\frac{1}{2}\|x\|^2}) = (2\pi)^{\frac{m}{2}} (\xi \mapsto e^{-\frac{1}{2}\|\xi\|^2})$.

En effet la fonction $f: x \mapsto e^{-\frac{1}{2}x^2}$ vérifie $(\star) \ y' = -xy$, donc en appliquant la transformation de Fourier à chaque membre de (\star) , la fonction \widehat{f} vérifie aussi (\star) et a fortiori est multiple de f .
On conclut en utilisant : $\widehat{f}(0) \stackrel{\text{Fubini}}{=} \left(\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \stackrel{\text{polaires}}{=} \left(\int_0^{+\infty} 2\pi e^{-\frac{1}{2}r^2} r dr \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2\pi}$.

Définition

On considère un espace vectoriel topologique E sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

On dit que E est un *espace de Fréchet* si sa topologie est métrisable et définie par une famille de semi-normes, et toute suite $(x_n)_{n \geq 0}$ dans E telle que $x_q - x_p \xrightarrow[p \leq q, p \rightarrow +\infty]{} 0$ est convergente.

Définition-Proposition

(a) On note $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m) = \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m) \mid \forall \alpha \in \mathbb{N}^m \ \forall N \in \mathbb{N} \ \| (1 + \|x\|^2)^N D^\alpha f \|_\infty < +\infty \right\}$.

Par conséquent, on a : $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \subseteq L^p(\mathbb{R}^m)$ lorsque $1 \leq p \leq +\infty$.

L'espace vectoriel $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ muni des semi-normes $f \mapsto \| (1 + \|x\|^2)^N D^\alpha f \|_\infty$ avec $\alpha \in \mathbb{N}^m$ et $N \in \mathbb{N}$ est un espace de Fréchet, appelé « espace de Schwartz ».

(b) L'application linéaire $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ est un homéomorphisme.

$$f \mapsto \widehat{f}$$

(c) L'application bilinéaire $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ est définie et continue.

$$(f, g) \mapsto fg$$

Il en résulte que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ est stable par convolution.

Proposition

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continue et intégrable.

On suppose que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, ou plus généralement que :

- (i) les séries $(\sum_{n \geq 0} f(x + 2\pi n))_{n \geq 0}$ et $(\sum_{n \geq 0} f(x - 2\pi n))_{n \geq 0}$ convergent uniformément sur tout segment ;
 (ii) $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)| < +\infty$.
par exemple $\sup_{x \in \mathbb{R}} |(x^2 + 1)f(x)| < +\infty$

Alors : $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(2\pi n)$ « formule sommatoire de Poisson ».

[Avec $\tau_{-x}f$ à la place de f , on trouve : $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{inx} = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + 2\pi n)$ pour $x \in \mathbb{R}$ (résultat aussi issu de la démonstration).]

n^e coefficient de Fourier de la fonction périodique de x qui apparaît à droite

complément

Distributions sur un ouvert Ω de \mathbb{R}^m : à retenir (J-Y D)

Définition-Proposition

(a) On note, en ignorant en première lecture la notion de « topologie définie par des semi-norme » : $\mathcal{E}(\Omega)$ l'espace de Fréchet $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ pour les semi-normes $\varphi \mapsto \sup_{x \in K} |D^\alpha \varphi(x)|$ avec $K \subseteq \Omega$ et $\alpha \in \mathbb{N}^m$; $\mathcal{C}_c(\Omega) = \{\varphi \in \mathcal{C}(\Omega) \mid \text{Supp } \varphi \text{ compact}\}$ et $\mathcal{C}_K(\Omega) = \{\varphi \in \mathcal{C}(\Omega) \mid \text{Supp } \varphi \subseteq K\}$, $K \subseteq \Omega$ fixé; $\mathcal{D}_K(\Omega)$ le fermé $\mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap \mathcal{C}_K(\Omega)$ de $\mathcal{E}(\Omega)$ muni de la topologie induite, $K \subseteq \Omega$ fixé; $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace vectoriel $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega) = \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \mid \text{Supp } \varphi \text{ compact}\}$ muni de la famille des semi-normes dont les restrictions à tous les sous-espaces vectoriels $\mathcal{D}_K(\Omega)$, $K \subseteq \Omega$, sont continues.

(b) On note $\mathcal{D}'(\Omega) := \mathcal{D}(\Omega)'$ l'espace des *distributions sur Ω* , $\mathcal{E}'(\Omega) := \mathcal{E}(\Omega)'$ l'espace des *distributions à support compact sur Ω* , et $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m) := \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)'$ l'espace des *distributions tempérées sur \mathbb{R}^m* .

Les espaces vectoriels $\mathcal{D}'(\Omega)$, $\mathcal{E}'(\Omega)$, et $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ sont caractérisés par :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}'(\Omega) &= \left\{ T \in \mathcal{D}(\Omega)^* \mid \forall K \subseteq \Omega \text{ compact } \exists N \in \mathbb{N} \exists M \geq 0 \forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega) |T(\varphi)| \leq M \max_{|\alpha| \leq N} \|D^\alpha \varphi\|_\infty \right\}^{(*)}; \\ \mathcal{E}'(\Omega) &= \left\{ T \in \mathcal{E}(\Omega)^* \mid \exists K \subseteq \Omega \text{ compact } \exists N \in \mathbb{N} \exists M \geq 0 \forall \varphi \in \mathcal{E}(\Omega) |T(\varphi)| \leq M \max_{|\alpha| \leq N} \sup_{x \in K} |D^\alpha \varphi(x)| \right\}; \\ \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m) &= \left\{ T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)^* \mid \exists N \in \mathbb{N} \exists M \geq 0 \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m) |T(\varphi)| \leq M \max_{|\alpha| \leq N} \|(1 + \|x\|^2)^N D^\alpha \varphi\|_\infty \right\}. \end{aligned}$$

On dit que $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ comme ci-dessus est *d'ordre fini* quand on peut choisir N indépendant de K ; le plus petit N indépendant de K qui convienne est alors appelé *ordre* de la distribution T .

On pose : $\langle T, \varphi \rangle = T(\varphi)$ quand $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. De même dans $\mathcal{E}(\Omega)$ et $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$.

(c) L'espace $\mathcal{M}(\Omega)$ des *mesures de Radon sur Ω* est défini par :

$$\mathcal{M}(\Omega) = \left\{ \mu \in \mathcal{C}_c(\Omega)^* \mid \forall K \subseteq \Omega \text{ compact } \exists M \geq 0 \forall \varphi \in \mathcal{C}_K(\Omega) |\mu(\varphi)| \leq M \|\varphi\|_\infty \right\}.$$

Si $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ vérifie $\mu(\varphi) \geq 0$ quand $\varphi \geq 0$: il existe une unique mesure positive μ_0 sur la tribu borélienne de Ω qui est finie sur les compacts, et telle que $\mu(\varphi) = \int_\Omega \varphi(x) d\mu_0(x)$ pour $\varphi \in \mathcal{C}_c(\Omega)$.

Définition-Proposition

(a) Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Pour $U \subseteq \Omega$, on définit $T|_U \in \mathcal{D}'(U)$ par $\langle T|_U, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$ quand $\varphi \in \mathcal{D}(U)$, où on a identifié φ à son prolongement par 0 hors de U (terme de droite de l'égalité).

Le *support de T* , noté $\text{Supp } T$, est le complémentaire du plus grand ouvert U de Ω tel que $T|_U = 0$.

utile { [Soient $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_n \subseteq \mathbb{R}^m$ et $K \subseteq \bigcup_{1 \leq k \leq n} \mathcal{O}_k$. Il existe $u_1, \dots, u_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ tels que $\sum_{k=1}^n u_k|_K = 1$ avec $0 \leq u_k \leq 1$ et $\text{Supp } u_k \subseteq \mathcal{O}_k$ ($1 \leq k \leq n$).]

(b) L'injection canonique $\mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathcal{E}(\Omega)$ est continue d'image dense.

L'application linéaire $\mathcal{E}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ est injective d'image $\underbrace{\{T \in \mathcal{D}'(\Omega) \mid \text{Supp } T \text{ compact}\}}_{\text{noté } \mathcal{D}'_c(\Omega), \text{ donc formé de distributions d'ordre fini}}$.

$$S \longmapsto S|_{\mathcal{D}(\Omega)}$$

(c) Les applications linéaires suivantes sont injectives(**) :

$$\begin{array}{ccc} L^{1loc}(\Omega) & \longrightarrow & \mathcal{D}'(\Omega) \quad \text{et} \quad \mathcal{M}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega) \\ f & \longmapsto & (f dx: \varphi \mapsto \int_\Omega \varphi(x) f(x) dx) \quad \mu \longmapsto (\mu|_{\mathcal{D}(\Omega)}: \varphi \mapsto \int_\Omega \varphi(x) d\mu(x)) \end{array}$$

On pose : $\int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) dT(x) = \langle T, \varphi \rangle$ quand $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. De même dans $\mathcal{E}(\Omega)$ et $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$.

(c) Soit $1 \leq p' \leq +\infty$. L'injection canonique $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \rightarrow L^{p'}(\mathbb{R}^m)$ est continue d'image dense.

Soit $1 \leq p \leq +\infty$. L'application linéaire $L^p(\mathbb{R}^m) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ est injective.

$$f \longmapsto (f dx: \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) f(x) dx)$$

(d) Les injections canoniques $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \rightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$ sont continues d'images denses.

Les applications $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^m) \mapsto S|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ et $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m) \mapsto T|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ sont injectives.

(*) On peut démontrer qu'une forme linéaire T sur $\mathcal{D}(\Omega)$ est continue si et seulement pour toute suite $(\varphi_n)_{n \geq 0}$ d'éléments $\mathcal{D}(\Omega)$ qui converge dans $\mathcal{D}(\Omega)$ vers un élément φ de $\mathcal{D}(\Omega)$, ce qui signifie que les φ_n et φ appartiennent à un même sous-espace vectoriel $\mathcal{D}_K(\Omega)$ dans lequel $(\varphi_n)_{n \geq 0}$ converge vers φ , on a : $T(\varphi_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} T(\varphi)$.

(**) Cette injectivité, lorsqu'on remplace Ω par un ouvert quelconque de \mathbb{R}^m , montre que : $\text{Supp}(f dx) = \text{Supp } f$.

Définition-Proposition

(a) Soient $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, et $\alpha \in \mathbb{N}^m$. On définit $fT \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ par :

$$\langle fT, \varphi \rangle = \langle T, f\varphi \rangle \quad \text{et} \quad \langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle \quad \text{pour } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Cela prolonge le produit de f par les éléments de $L^{1loc}(\Omega)$ et l'action de D^α sur $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

(b) On note : $\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^m) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m) \mid \forall \alpha \in \mathbb{N}^m \exists N \in \mathbb{N} \|(1 + \|x\|^2)^{-N} D^\alpha f\|_\infty < +\infty\}$.

Soient $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$, $f \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^m)$ par exemple polynomiale, et $\alpha \in \mathbb{N}^m$.

On définit $fT \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ et $D^\alpha T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ par les formules du (a) pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$.

(c) Soient $-\infty \leq a < x_1 < \dots < x_n < b \leq +\infty$ et une fonction $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{C}$ tels que $f|_{]a, x_1[}$, $f|_{]x_1, x_2[}$, \dots , $f|_{]x_n, b[}$ ont des prolongements de classe C^1 à $]a, x_1]$, $[x_1, x_2]$, \dots , $[x_n, b]$.

On a : $(f dx)^\vee = (f' dx) + \sum_{k=1}^n (f(x_k^+) - f(x_k^-)) \delta_{x_k}$ dans $\mathcal{D}'(]a, b[)$ « formule des sauts ».

Exemples

(a) Soit $a \in \mathbb{R}^m$. La « mesure de Dirac en a » est la distribution tempérée $\delta_a : \varphi \mapsto \varphi(a)$ sur \mathbb{R}^m .

(b) La « fonction de Heaviside » $H := \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+} dx$ est une distribution tempérée sur \mathbb{R} avec $H' = \delta_0$.

Définition-Proposition

(a) Soient $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ tels que $\text{Supp } S$ ou $\text{Supp } T$ est compact. ← [par exemple : $S = \delta_0$]

On définit $S * T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ par les égalités suivantes pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$:

$$\langle S * T, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^m} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x+y) dS(x) \right)}_{(\check{S} * \varphi)(y) \text{ qui est } C^\infty \text{ en } y} dT(y) = \int_{\mathbb{R}^m} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x+y) dT(y) \right)}_{(\varphi * \check{T})(x) \text{ qui est } C^\infty \text{ en } x} dS(x). \quad \leftarrow [\delta_0 * T = T]$$

On a : $\text{Supp}(S * T) \subseteq \overline{\text{Supp } S + \text{Supp } T}$, $S * T = T * S$ et $(S * T)^\vee = \check{S} * \check{T}$.

(b) Soit (f, T) dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m) \times \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ ou $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^m) \times \mathcal{E}'(\mathbb{R}^m)$ ou $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m) \times \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$.

On a : $f dx * T = (f * T) dx$ où $f * T : x \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} f(x-y) dT(y)$ est de classe C^∞ .

Soient $f, g \in \mathcal{L}^{1loc}(\mathbb{R}^m)$ tels que $\text{Supp } f$ ou $\text{Supp } g$ est compact.

On a : $(f dx) * (g dx) = (f * g) dx$ où $f * g : x \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} f(x-t) g(t) dt$ est défini presque partout.

(c) Soient $S, T, U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ tels que deux des supports $\text{Supp } S$, $\text{Supp } T$, $\text{Supp } U$ sont compacts.

On a : $S * (T * U) = (S * T) * U$.

← [à utiliser avec l'égalité $\langle T, \varphi \rangle = \langle \check{\varphi} * T, 0 \rangle$]

(d) Soient $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ avec un des deux supports compact, ou, $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ et $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$.

On a : $D^\alpha(S * T) = (D^\alpha S) * T$ pour $\alpha \in \mathbb{N}^m$.

E est « solution fondamentale de D »

(e) Soient $D \in \mathbb{C}[\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}]$ et $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ (resp. $E \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$) tel que $\overbrace{DE} = \delta_0$.

Pour tout $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^m)$ (resp. $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$), la distribution $T := E * S$ vérifie $DT = S$.

Définition-Proposition

(a) On prolonge les applications $L^1(\mathbb{R}^m) \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m)$ et $L^2(\mathbb{R}^m) \xrightarrow{\mathcal{F}} L^2(\mathbb{R}^m)$ en une bijection linéaire $\mathcal{F}_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ de réciproque $(2\pi)^{-m} \overline{\mathcal{F}}_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$.

$$T \mapsto (\hat{T} : \varphi \mapsto T(\mathcal{F}\varphi)) \qquad T \mapsto (\varphi \mapsto (2\pi)^{-m} T(\overline{\mathcal{F}}\varphi))$$

(b) On note $\langle \check{\check{T}}, \varphi \rangle = \langle T, \check{\varphi} \rangle$ quand $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. On a :

$$\mathcal{F}\check{\check{T}} = (\mathcal{F}T)^\vee = \overline{\mathcal{F}}T \quad \text{pour tout } T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m).$$

(c) Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$. On a : $(D^\alpha T)^\wedge = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \hat{T}$ et $D^\alpha \hat{T} = ((-i)^{|\alpha|} x^\alpha T)^\wedge$ pour $\alpha \in \mathbb{N}^m$.

(d) Soient $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ et $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^m)$. On obtient $S * T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ qui envoie $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ sur :

$$\langle S * T, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^m} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x+y) dS(x) \right)}_{(\check{S} * \varphi)(y) \text{ où } \check{S} * \varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)} dT(y).$$

De plus : $\widehat{S * T} = \hat{S} \hat{T}$ où $\hat{T} \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^m)$ avec $\hat{T}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^m} e^{-i\xi \cdot x} dT(x)$ pour $\xi \in \mathbb{R}^m$.

En particulier : $f * T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ quand $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ et $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^m)$.

Formes linéaires continues : à retenir (J-Y D)

Soient E, F , et G des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Définition-Proposition (hors programme pour (b) et (c))

Soit V un \mathbb{K} -espace vectoriel.

(a) Une *semi-norme* sur V est une application $p: V \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant :

- (i) $\forall v \in V \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad p(\lambda v) = |\lambda| p(v)$;
- (ii) $\forall v, w \in V \quad p(v + w) \leq p(v) + p(w)$.

(b) On appelle structure d'« espace vectoriel topologique » sur V une topologie sur V pour laquelle les applications $V \times V \rightarrow V$ et $\mathbb{K} \times V \rightarrow V$ sont continues.

$$(x, y) \mapsto x + y \quad (\lambda, x) \mapsto \lambda x$$

Dans ce cas, on note V' l'ensemble des formes linéaires continues sur V .

(c) On se donne une famille $(p_i)_{i \in I}$ de semi-normes sur V . Les *boules ouvertes* associées sont :

$$B_{i_1, \dots, i_m}(x_0, \varepsilon) := \left\{ x \in V \mid \max_{i \in \{i_1, \dots, i_m\}} p_i(x - x_0) < \varepsilon \right\} \quad \text{où } x_0 \in V \text{ et } \varepsilon > 0.$$

Les réunions de boules ouvertes munissent V d'une structure d'espace vectoriel topologique. (Les ouverts de V sont les $U \subseteq V$ tels que tout $x \in U$ est centre d'une boule ouverte incluse dans U .)

Une forme linéaire $l: V \rightarrow \mathbb{K}$ est continue pour cette topologie si et seulement si :

$$\exists i_1, \dots, i_m \in I \quad \exists M \geq 0 \quad \forall x \in V \quad |l(x)| \leq M \max_{i \in \{i_1, \dots, i_m\}} p_i(x).$$

Définition-Proposition (hors programme)

Soient V et W des espaces vectoriels topologiques.

On note $\mathcal{L}(V, W)$ l'ensemble des applications linéaires continues de V dans W .

Soit $T \in \mathcal{L}(V, W)$. On définit $T' \in \mathcal{L}(W', V')$ par : $T'(f) = f \circ T$ pour tout $f \in W'$.

Théorème (« théorème de Hahn-Banach ») ←[cf. « forme analytique du théorème de Hahn-Banach » entre parenthèses]

Toute forme linéaire continue f sur un sous-espace vectoriel V de E se prolonge à E en une forme linéaire continue \tilde{f} de même norme. (*)

(Soient U un espace vectoriel réel, p une semi-norme sur U , et V un sous-espace vectoriel de U .
 Toute forme linéaire l sur V majorée par $p|_V$ se prolonge à U en une forme linéaire \tilde{l} majorée par p .
 On en déduit le théorème avec U égal à l'espace vectoriel réel associé à E , $l := \operatorname{Re} f$ et $p(x) := \|l\| \|x\|$.)

Corollaire

(a) Pour tout $x_0 \in E \setminus \{0\}$, il existe $f \in E'$ tel que : $f(x_0) = \|x_0\|$ et $\|f\| = 1$. ← [prendre $V = \mathbb{K}x_0$]
 Ainsi, un vecteur x_0 de E est nul si et seulement si tout élément de E' s'annule dessus. (**)

(b) Soient V un sous-espace vectoriel de E et $x_0 \in E$. On a : $x_0 \in \overline{V}$ si et seulement si toute $f \in E'$ qui est nulle sur V est nulle en x_0 . ← [appliquer (a) à E/\overline{V} muni de $\|u\| := \inf_{x \in u} \|x\|$ pour $u \in E/\overline{V}$ et au vecteur $\overline{x_0}$]

Par conséquent, $A \subseteq E$ vérifie $\overline{\operatorname{Vect}(A)} = E$ si et seulement si toute $f \in E'$ nulle sur A est nulle.

« A est une partie totale de E »

(c) On suppose que E' est séparable. Alors E est séparable.

(*) Le théorème reste vrai dans un espace vectoriel topologique de topologie définie par une famille de semi-normes.

(**) On note $\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}([0, 1]) := \{f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \text{ mesurable} \mid \int_{[0, 1]} |f(x)|^{\frac{1}{2}} dx < +\infty\}$ puis $L^{\frac{1}{2}}([0, 1]) := \mathcal{L}^{\frac{1}{2}}([0, 1])/\mathcal{N}$ où \mathcal{N} est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}([0, 1])$ formé des fonctions mesurables nulles presque partout.

On munit $L^{\frac{1}{2}}([0, 1])$ de la distance $d_{\frac{1}{2}}$ définie par : $d_{\frac{1}{2}}(f, g) := \int_{[0, 1]} |f(x) - g(x)|^{\frac{1}{2}} dx$ pour tous $f, g \in L^{\frac{1}{2}}([0, 1])$.

On peut montrer que l'espace vectoriel topologique $L^{\frac{1}{2}}([0, 1])$ vérifie : $L^{\frac{1}{2}}([0, 1]) \neq \{0\}$ mais $L^{\frac{1}{2}}([0, 1])' = \{0\}$.

Théorème (« théorème de séparation des convexes ») ←[« forme géométrique du théorème de Hahn-Banach »]

Soient A et B deux convexes disjoints de E avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

(a) On suppose A ouvert de E . Il existe $\varphi \in E'$ tel que : $\sup_{x \in A} \varphi(x) \leq \inf_{x \in B} \varphi(x)$.

(b) On suppose A compact et B fermé de E . Il existe $\varphi \in E'$ tel que : $\sup_{x \in A} \varphi(x) < \inf_{x \in B} \varphi(x)$.

Définition

(a) Soient $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de E et $x \in E$. On dit que $(x_n)_{n \geq 0}$ converge faiblement dans E vers x , et note $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x$, si : $f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(x)$ pour tout $f \in E'$. ←[convergence simple dans $\mathbb{K}^{E'}$]

Lorsqu'elle existe, la limite faible x de $(x_n)_{n \geq 0}$ est unique.

(b) Soient $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de E' et $f \in E$. On dit que $(f_n)_{n \geq 0}$ converge faiblement-* dans E' vers f , et note $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{*} f$, si : $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(x)$ pour tout $x \in E$. ←[convergence simple dans \mathbb{K}^E]

Remarques

(a) Si $(x_n)_{n \geq 0}$ converge vers x dans E , alors $(x_n)_{n \geq 0}$ converge faiblement vers x dans E .

(b) Si $(f_n)_{n \geq 0}$ converge vers f dans E' , alors $(f_n)_{n \geq 0}$ converge faiblement-* vers f dans E' .

(c) Si $(x_n)_{n \geq 0}$ converge faiblement vers x dans E , alors $(x_n)_{n \geq 0}$ est bornée dans E et $\|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|x_n\|$. ←[théorème de Banach-Steinhaus dans $(E)'$]

(c) Si E est un espace de Banach et $(f_n)_{n \geq 0}$ converge faiblement-* vers f dans E' , alors $(f_n)_{n \geq 0}$ est bornée dans E' et $\|f\| \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|$. ←[théorème de Banach-Steinhaus dans E']

(d) Si $(x_n)_{n \geq 0}$ converge vers x dans E et $(f_n)_{n \geq 0}$ converge faiblement-* vers f dans E' (resp. $(x_n)_{n \geq 0}$ converge faiblement vers x dans E et $(f_n)_{n \geq 0}$ converge vers f dans E'), alors $f_n(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(x)$.

Définition (hors programme)

(a) La topologie faible sur E est la topologie, notée $\sigma(E, E')$, des semi-normes $x \mapsto |\varphi(x)|$, $\varphi \in E'$.

(b) La topologie faible-* sur E' est la topologie, notée $\sigma(E', E)$, des semi-normes $\varphi \mapsto |\varphi(x)|$, $x \in E$.

Théorème (« théorème de Banach-Alaoglu »)

On suppose que E est séparable.

Toute suite bornée d'éléments de E' a une suite extraite qui converge faiblement-*.

Définition-Proposition

(a) On appelle *bidual topologique* de E et note E'' le dual topologique $(E')'$ de E' .

(b) L'application linéaire $j : x \mapsto (f \mapsto f(x))$ de E dans E'' conserve la norme, donc est injective.

(c) On dit que E est *réflexif* si cette application canonique de E dans E'' est surjective.

Exemples

(a) Tout espace de Hilbert est réflexif.

(b) L'espace de Banach $L_{\mathbb{K}}^p(\mu)$ est réflexif lorsque (X, \mathcal{A}, μ) est un espace mesuré et $p \in]1, +\infty[$.

Théorème

On suppose que E est réflexif.

Toute suite bornée d'éléments de E a une suite extraite faiblement convergente.