

# Applications linéaires continues : à retenir (J-Y D)

Soient  $E, F$ , et  $G$  des espaces vectoriels sur  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

## Définition

(a) Une *norme* sur  $E$  est une application  $N: E \rightarrow \mathbb{R}^+$  vérifiant :

(i)  $\forall v \in E \quad N(v) = 0 \iff v = 0$ ;

(ii)  $\forall v \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad N(\lambda v) = |\lambda| N(v)$ ;

(iii)  $\forall v, w \in E \quad N(v + w) \leq N(v) + N(w)$  (« inégalité triangulaire »).

(b) On dit que deux normes  $N_1$  et  $N_2$  sur  $E$  sont *équivalentes* si :

$$\exists \alpha, \beta > 0 \quad \alpha N_1 \leq N_2 \leq \beta N_1. \quad \leftarrow [\text{c-à-d } \frac{N_1}{N_2} \text{ et } \frac{N_2}{N_1} \text{ bornées sur } E \setminus \{0\}]$$

(c) La *distance* associée à une norme  $N$  sur  $E$  est l'application  $d: E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$  définie par :

$$\forall x, y \in E \quad d(x, y) := N(x - y).$$

## Exemples

(a) Soit  $A$  un ensemble. On définit une norme  $\| \cdot \|_\infty$  sur l'espace vectoriel  $(\mathbb{K}^A)_b$  formé des applications bornées de  $A$  dans  $\mathbb{K}$  en posant :  $\|f\|_\infty := \sup_{x \in A} |f(x)|$  pour tout  $f \in (\mathbb{K}^A)_b$ .

(b) On suppose que  $(E, \| \cdot \|)$  est un espace vectoriel normé.

« Le » complété  $\tilde{E}$  de  $E$  a une structure d'espace vectoriel normé qui prolonge celle de  $E$ .

## Définition-Proposition

On se donne des normes  $\| \cdot \|_E$  et  $\| \cdot \|_F$  sur  $E$  et  $F$ . L'espace vectoriel  $E \times F$  est muni de la *norme 2 du produit*  $\| \cdot \|_{E \times F}$  définie par :  $\|(v, w)\|_{E \times F} := \sqrt{\|v\|_E^2 + \|w\|_F^2}$  pour tout  $(v, w) \in E \times F$ .<sup>(\*)</sup>

## Proposition

On se donne des normes  $\| \cdot \|_E, \| \cdot \|_F, \| \cdot \|_G$  sur  $E, F, G$ .

(a) Une application linéaire  $u: E \rightarrow F$  est continue si et seulement s'il existe  $k \geq 0$  tel que :

$$\|u(x)\|_F \leq k \|x\|_E \text{ pour tout } x \in E.$$

(b) Une application bilinéaire  $\pi: E \times F \rightarrow G$  est continue si et seulement s'il existe  $k \geq 0$  tel que :

$$\|\pi(x, y)\|_G \leq k \|x\|_E \|y\|_F \text{ pour tout } (x, y) \in E \times F.$$

(c) La somme de  $E \times E$  dans  $E$  et la multiplication par un scalaire de  $\mathbb{K} \times E$  dans  $E$  sont des applications continues (cas particuliers respectivement de (a) et de (b)).

(d) Lorsque  $E$  est de dimension finie : toute application linéaire de  $E$  dans  $F$  est continue.

## Théorème (« théorème de Riesz »)

On se donne une norme  $\| \cdot \|_E$  sur  $E$ .

La boule unité fermée de  $E$  est compacte si et seulement si  $E$  est de dimension finie.

## Définition-Proposition

On se donne des normes  $\| \cdot \|_E, \| \cdot \|_F$ , et  $\| \cdot \|_G$  sur  $E, F$ , et  $G$ .

(a) On note  $\mathcal{L}(E, F)$  l'espace vectoriel formé des applications linéaires continues de  $E$  dans  $F$ . On pose :  $E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ . C'est le sous-espace vectoriel de  $E^*$  formé des formes linéaires continues.

(b) On appelle *norme subordonnée* à  $\| \cdot \|_E$  et  $\| \cdot \|_F$  la norme  $\| \cdot \|$  sur  $\mathcal{L}(E, F)$  définie par :

$$\|u\| := \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} \text{ pour tout } u \in \mathcal{L}(E, F)^{(**)}. \quad \leftarrow [\text{on note } \sup \emptyset = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^+]$$

En particulier, on a : si  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $x \in E$ , alors  $\|u(x)\|_F \leq \|u\| \|x\|_E$ .

(c) Si  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $v \in \mathcal{L}(F, G)$ , alors  $v \circ u \in \mathcal{L}(E, G)$  et  $\|v \circ u\| \leq \|v\| \|u\|$ .

(\*) Comme les normes  $\| \cdot \|_1, \| \cdot \|_2$ , et  $\| \cdot \|_\infty$  sur  $\mathbb{R}^2$  sont équivalentes, cette norme  $\| \cdot \|_{E \times F}$  est équivalente aux normes  $(v, w) \mapsto \|v\|_E + \|w\|_F$  et  $(v, w) \mapsto \max(\|v\|_E, \|w\|_F)$  sur  $E \times F$ .

(\*\*) Le nombre  $\|u\|$  est donc le plus petit réel  $k \geq 0$  vérifiant :  $\|u(x)\|_F \leq k \|x\|_E$  pour tout  $x \in E$ .

## Proposition

On suppose que  $F$  est un espace de Banach.

(a) L'espace vectoriel normé  $(\mathcal{L}(E, F), \|\cdot\|)$  est un espace de Banach.

(b) Soit  $D$  un sous-espace vectoriel dense de  $E$ .

Tout  $u \in \mathcal{L}(D, F)$  a un unique prolongement  $\tilde{u} \in \mathcal{L}(E, F)$ ; de plus  $\|\tilde{u}\| = \|u\|$ .

## Définition

On dit qu'un espace topologique  $X$  est *de Baire* s'il vérifie l'une des propriétés équivalentes :

(i) toute réunion  $\bigcup_{n \geq 0} F_n$  d'une suite  $(F_n)_{n \geq 0}$  de fermés d'intérieurs vides est d'intérieur vide;

(ii) toute intersection  $\bigcap_{n \geq 0} U_n$  d'une suite  $(U_n)_{n \geq 0}$  d'ouverts denses dans  $X$  est dense dans  $X$ .

## Théorème (« théorème de Baire »)

Tout espace métrique complet est de Baire.

## Théorème (« théorème de Banach-Steinhaus »)

On suppose que  $E$  est un espace de Banach.

(a) Soit  $A \subseteq \mathcal{L}(E, F)$ . Si  $\sup_{T \in A} \|T(x)\| < +\infty$  pour tout  $x \in E$ , alors  $\sup_{T \in A} \|T\| < +\infty$ .

(b) Si  $f_n \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $n \geq 0$ , vérifient  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{simplement}} f$ , alors  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $\|f\| \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\| < +\infty$ .

## Définition

On dit qu'une application  $f$  d'un espace topologique  $X$  dans un espace topologique  $Y$  est *ouverte* si pour tout ouvert  $\mathcal{O}$  de  $X$ , la partie  $f(\mathcal{O})$  de  $Y$  est ouverte.

## Théorème (« théorème de l'application ouverte »)

On suppose que  $E$  et  $F$  sont des espaces de Banach.

Toute application linéaire continue surjective de  $E$  sur  $F$  est ouverte.

En particulier toute application linéaire continue bijective de  $E$  sur  $F$  a une réciproque continue.

## Théorème (« théorème du graphe fermé »)

On suppose que  $E$  et  $F$  sont des espaces de Banach.

Soit  $f: E \rightarrow F$  une application linéaire.

On appelle *graphe de  $f$*  la partie  $\Gamma(f) := \{(x, y) \in E \times F \mid y = f(x)\}$  de  $E \times F$ .

L'application linéaire  $f$  est continue si et seulement si son graphe est fermé dans  $E \times F$ .