Axiome du choix (J-Y D) $\longleftarrow$ hors programme !!!

Définition 1

Soient E un ensemble et Γ une partie de $E \times E$. On note « $x \leq y$ » pour « $(x, y) \in \Gamma$ ».

On dit que $\leq$ est *une relation d'ordre* $\big($ou que $(E, \leq)$ est *un ensemble ordonné*$\big)$ si :

(i) $\forall x \in E \quad x \leq x$;

(ii) $\forall x, y \in E \quad \big((x \leq y \text{ et } y \leq x) \implies x = y\big)$;

(iii) $\forall x, y, z \in E \quad \big((x \leq y \text{ et } y \leq z) \implies x \leq z\big)$.

Dans ce cas, on dit que $\leq$ est *un ordre total* si :

(iv) $\forall x, y \in E \quad (x \leq y \text{ ou } y \leq x)$.

Définition 2

Soient E un ensemble et $\leq$ une relation d'ordre sur E.

(a) Un *majorant* d'une partie A de E est un élément m de E tel que : $a \leq m$ pour tout $a \in A$.
Une *chaîne* de $(E, \leq)$ est une partie A de E sur laquelle $\leq$ est un ordre total.

(b) Quand $x, y \in E$, on note « $x < y$ » pour « $x \leq y$ et $x \neq y$ ».
Un *élément maximal* de $(E, \leq)$ est un élément m de E tel qu'aucun $x \in E$ ne vérifie $m < x$.
[Attention de ne pas confondre « élément maximal » avec « plus grand élément ».]

(c) On dit que $\leq$ est *un bon ordre* si toute partie non-vide de E a un plus petit élément.(*)

Théorème

Les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) « Lemme de Zorn » : un ensemble ordonné dont toute chaîne est majorée, a un élément maximal.
(ii) « Théorème de Zermelo » : tout ensemble admet un bon ordre.
(iii) « Axiome du choix » : pour tout ensemble E, il existe une application f de l'ensemble des parties non-vides de E dans E, telle que pour toute partie non-vide A de E on ait $f(A) \in A$.

Démonstration

((i) $\implies$ (ii)) On suppose que le lemme de Zorn est vérifié.
On se donne un ensemble E et cherche à construire un bon ordre sur E.
On appellera ici *segment initial* d'un ensemble ordonné $(Y, \leq)$ une partie X de Y telle que :

$$\text{si } x \in X, \text{ alors } \{y \in Y \mid y < x\} \subseteq X.$$

On pose : $\mathscr{M} = \{(A, \mathcal{R}_A)\ ;\ A \subseteq E \text{ et } \mathcal{R}_A \text{ bon ordre sur } A\}$. On ordonne $\mathscr{M}$ par :
$(A, \mathcal{R}_A) \leq (B, \mathcal{R}_B) \iff A \subseteq B$ et $\mathcal{R}_A$ est restriction de $\mathcal{R}_B$ et A est un segment initial de B.

On vérifie maintenant que $(\mathscr{M}, \leq)$ est un ensemble ordonné dont toute chaîne est majorée.
Soit $\mathscr{C}$ une chaîne de $(\mathscr{M}, \leq)$. On pose $\mathscr{A} = \{A\ ;\ (A, \mathcal{R}_A) \in \mathscr{C}\}$ et $C = \bigcup\limits_{A \in \mathscr{A}} A$.

On munit C de l'ordre $\mathcal{R}_C$ suivant : $\forall x, y \in C \quad \big(x \,\mathcal{R}_C\, y \Leftrightarrow \exists A \in \mathscr{A} \quad (x, y \in A \text{ et } x \,\mathcal{R}_A\, y)\big)$.
Il faut remarquer que dans cette définition la condition « $x \,\mathcal{R}_A\, y$ » ne dépend pas du choix de A.

Soit S une partie non-vide de C. On fixe $s \in S$; il existe $A \in \mathscr{A}$ tel que $s \in A$.
On suppose que s n'est pas le plus petit élément de S (sinon S a un plus petit élément).

On introduit $T := \{t \in S \backslash \{s\} \mid t \,\mathcal{R}_C\, s\}$. Soit $t \in T$; il existe $B \in \mathscr{A}$ tel que $t \in B$. On sait que $t \,\mathcal{R}_C\, s$, et que $\mathscr{C}$ est une chaîne : soit on a $(A, \mathcal{R}_A) \leq (B, \mathcal{R}_B)$ et comme A est un segment initial de B on obtient $t \in A$, soit on a $(B, \mathcal{R}_B) \leq (A, \mathcal{R}_A)$ et comme $B \subseteq A$ on obtient encore $t \in A$.
Comme T est une partie non-vide de A, il a un plus petit élément m pour le bon ordre $\mathcal{R}_A$.
En comparant les éléments de S à s ($\mathcal{R}_C$ est total), on obtient : m est le plus petit élément de S.

Ainsi $\mathcal{R}_C$ est un bon ordre.

(∗) En utilisant les parties de E formées de deux éléments, on constate qu'un bon ordre est un ordre total.

On constate que $(C, \mathcal{R}_C)$ est un majorant de $\mathscr{C}$ dans $(\mathscr{M}, \leq)$. En effet, pour tout $(A, \mathcal{R}_A) \in \mathscr{C}$, on a : $A \subseteq C$ et $\mathcal{R}_A$ est restriction de $\mathcal{R}_C$; de plus, lorsque $s \in A$ et $t \in C \backslash \{s\}$ vérifient $t\, \mathcal{R}_C\, s$, on obtient $t \in A$ en raisonnant comme ci-dessus.

D'après le lemme de Zorn, $(\mathscr{M}, \leq)$ a un élément maximal $(A_0, \mathcal{R}_{A_0})$. Il reste à voir par l'absurde que $A_0 = E$. Sinon on fixe $x \in E \setminus A_0$. On pose $A_1 = A_0 \cup \{x\}$. On note $\mathcal{R}_{A_1}$ l'ordre sur A_1 qui prolonge $\mathcal{R}_{A_0}$ et rend x maximal. On a : $(A_1, \mathcal{R}_{A_1}) \in \mathscr{M}$ et $(A_0, \mathcal{R}_{A_0}) < (A_1, \mathcal{R}_{A_1})$ <u>contradiction</u>.

((ii) $\Longrightarrow$ (iii)) On suppose donné un bon ordre $\leq$ sur E. Il permet de construire l'application f qui à toute partie non-vide A de E associe le plus petit élément de A.

((iii) $\Longrightarrow$ (i)) Cette implication, qui est la plus difficile, est admise.
Voir par exemple `https://www.irif.fr/ roziere/m63010/zorn.pdf` □

Dorénavant on se placera dans le cadre de la théorie des ensembles usuelle (de Zermelo-Fraenkel) à laquelle on ajoute l'axiome du choix.

Corollaire

Tout espace vectoriel E sur un corps commutatif $\mathbb{K}$ a une base.

Démonstration

On note X l'ensemble des parties L de E pour lesquelles la famille $(v)_{v \in L}$ est libre.

Soit $\mathscr{C}$ une chaîne de $(X, \subseteq)$. On pose : $M = \bigcup_{L \in \mathscr{C}} L$.

Soit $\underbrace{\{v_1, ..., v_n\}}_{\text{distincts}}$ une partie finie de M. Il existe $L_1, ..., L_n \in \mathscr{C}$ tels que $v_1 \in L_1$, ..., $v_n \in L_n$. Comme $\mathscr{C}$ est une chaîne, on dispose parmi $L_1, ..., L_n$ d'un plus grand élément L_i $(1 \leq i \leq n)$. On a donc $v_1, ..., v_n \in L_i$, ce qui montre que la famille $(v_1, ..., v_n)$ est libre. Ainsi M est libre.

Par conséquent $\mathscr{C}$ est majorée dans $(X, \subseteq)$ par M.

On applique le lemme de Zorn. Il existe un élément maximal B dans $(X, \subseteq)$.

Soit $x \in E$. Comme B est maximal, la partie $B \cup \{x\}$ de E n'est pas libre, ce qui fournit $n \in \mathbb{N}$, $v_1, ..., v_n \in B \cup \{x\}$ et $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ tels que $\alpha_1\, v_1 + \cdots + \alpha_n\, v_n = 0$. Vu que $(v)_{v \in B}$ est libre, l'un des vecteurs $v_1, ..., v_n$ est égal à x avec un coefficient α_i correspondant non-nul. On obtient ainsi x comme combinaison linéaire de vecteurs de B.

On en conclut que la famille $(v)_{v \in B}$ est une base de E. □

Théorème de Tychonoff

Définition 1

Soit X un ensemble.

(a) Un *filtre* sur X est un ensemble non vide $\mathscr{F}$ de parties non vides de X tel que :
(i) $\forall F_1, F_2 \in \mathscr{F} \quad F_1 \cap F_2 \in \mathscr{F}$;
(ii) $\forall F \in \mathscr{F} \quad \forall A \subseteq X \quad (F \subseteq A \Longrightarrow A \in \mathscr{F})$.

(b) Un *ultrafiltre* sur X est un élément $\mathscr{U}$ de l'ensemble des filtres sur X qui est maximal pour la relation d'inclusion $\subseteq$.

Proposition 1

Soient X un ensemble et $\mathscr{F}$ un filtre sur X.

(a) Il existe un ultrafiltre $\mathscr{U}$ sur X qui contient $\mathscr{F}$.

(b) On a : $\mathscr{F}$ est un ultrafiltre si et seulement si pour tout $A \subseteq X$, $A \in \mathscr{F}$ ou $X \setminus A \in \mathscr{F}$.

Démonstration

(a) Il suffit d'appliquer le lemme de Zorn à l'ensemble des filtres contenant $\mathscr{F}$, dans lequel toute partie totalement ordonnée est majorée par la réunion de ses éléments qui est elle-même un filtre.

(b) ($\Longrightarrow$) On suppose que $\mathscr{F}$ n'est pas un ultrafiltre.
On fixe un filtre $\mathscr{F}'$ qui contient strictement $\mathscr{F}$. On se donne $A \in \mathscr{F}'$ tel que $A \notin \mathscr{F}$.
On a : $A \cap (X \setminus A) = \emptyset$, donc $X \setminus A \notin \mathscr{F}'$ et a fortiori $X \setminus A \notin \mathscr{F}$.

($\Longleftarrow$) Soit $A \subseteq X$ tel que $A \notin \mathscr{F}$ et $X \setminus A \notin \mathscr{F}$.
On pose : $\mathscr{F}' = \{F' \subseteq X \mid \exists F \in \mathscr{F} \quad F \cap A \subseteq F'\}$.
L'inclusion $F \supseteq F \cap A$ montre que $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{F}'$. Comme $A \in \mathscr{F}'$ et $A \notin \mathscr{F}$, on a même $\mathscr{F} \subsetneq \mathscr{F}'$.
Pour montrer que $\mathscr{F}$ n'est pas un ultrafiltre, il reste à constater que $\mathscr{F}'$ est un filtre sur X.
Tout d'abord : $X \supseteq X \cap A$ avec $X \in \mathscr{F}$, donc $X \in \mathscr{F}'$ et $\mathscr{F}' \neq \emptyset$.
Lorsque $F \in \mathscr{F}$, on a $F \not\subseteq X \setminus A$ puisque $X \setminus A \notin \mathscr{F}$, puis $F \cap A \neq \emptyset$ ce qui montre que les éléments de $\mathscr{F}'$ sont non vides.
(i) Soient $F'_1, F'_2 \in \mathscr{F}'$: il existe $F_1, F_2 \in \mathscr{F}$ tels que $F_1 \cap A \subseteq F'_1$ et $F_2 \cap A \subseteq F'_2$.
On a : $(F_1 \cap F_2) \cap A \subseteq F'_1 \cap F'_2$ avec $F_1 \cap F_2 \in \mathscr{F}$, donc $F'_1 \cap F'_2 \in \mathscr{F}'$.
(ii) Il est clair que toute partie de X contenant un élément de $\mathscr{F}'$ appartient elle-même à $\mathscr{F}'$. □

Définition 2

Soient X un espace topologique, $\mathscr{F}$ un filtre sur X et $l \in X$.
On note $\mathcal{V}(l)$ l'ensemble des voisinages de l dans X.

On dit que $\mathscr{F}$ *converge vers* l (ou que x tend vers l en suivant $\mathscr{F}$) si $\mathcal{V}(l) \subseteq \mathscr{F}$, c'est-à-dire :
$$\forall V \in \mathcal{V}(l) \quad \exists F \in \mathscr{F} \quad \forall x \in X \quad (x \in F \Longrightarrow x \in V).$$
Dans ce cas et lorsque X est séparé, cette limite l est unique et notée $\lim\limits_{\mathscr{F}} \mathrm{id}_X$.(*)

Exemple

Soient X un espace topologique séparé, $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite de points de X et $l \in X$.
On considère le filtre $\mathscr{F}$ sur X défini par : $\mathscr{F} = \{A \subseteq X \mid \exists N \in \mathbb{N} \quad \{x_n\}_{n \geq N} \subseteq A\}$.

On a : $\quad x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l \iff \lim\limits_{\mathscr{F}} \mathrm{id}_X = l$.

(*) Soient X un ensemble, Y un espace topologique, $f \colon X \to Y$ et $l \in Y$.

(a) Une *base de filtre* sur X est un ensemble non vide $\mathscr{B}$ de parties non vides de X tel que :
$$\forall B_1, B_2 \in \mathscr{B} \quad \exists B \in \mathscr{B} \quad B \subseteq B_1 \cap B_2.$$
(b) On dit que f tend vers l suivant une base de filtre $\mathscr{B}$ fixée sur X, et note $l \in \lim\limits_{\mathscr{B}} f$, si :
$$\forall V \in \mathcal{V}(l) \quad \exists B \in \mathscr{B} \quad \forall x \in X \quad (x \in B \Longrightarrow f(x) \in V).$$

Proposition 2

Soit X un espace topologique séparé.

On a : X est compact si et seulement si tout filtre sur X est inclus dans un filtre convergent.

Démonstration

($\Longrightarrow$) On suppose que X est compact. Soit $\mathscr{F}$ un filtre sur X.

On suppose, par l'absurde, que $\bigcap\limits_{F\in\mathscr{F}} \overline{F} = \emptyset$. Comme X est compact et $X = \bigcup\limits_{F\in\mathscr{F}} (X\setminus\overline{F})$ où les $X\setminus\overline{F}$ sont des ouverts de X, il existe $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ et $F_1, ..., F_n \in \mathscr{F}$ tels que $\overline{F_1} \cap \cdots \cap \overline{F_n} = \emptyset$.

L'inclusion $F_1 \cap \cdots \cap F_n \subseteq \overline{F_1} \cap \cdots \cap \overline{F_n}$, montre que $F_1 \cap \cdots \cap F_n = \emptyset$, ce qui donne une contradiction sachant que $F_1 \cap \cdots \cap F_n \in \mathscr{F}$.

On se donne $x_0 \in \bigcap\limits_{F\in\mathscr{F}} \overline{F}$. On pose : $\mathscr{F}' = \{A \subseteq X \mid \exists V \in \mathcal{V}(x_0) \quad \exists F \in \mathscr{F} \quad V \cap F \subseteq A\}$.

Le choix de $V = X$ montre que $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{F}'$, donc $\mathscr{F}' \neq \emptyset$. On vérifie que $\mathscr{F}'$ est un filtre sur X.

Quand $V \in \mathcal{V}(x_0)$, on a : $V \cap F \neq \emptyset$ pour tout $F \in \mathscr{F}$. Les éléments de $\mathscr{F}'$ sont donc non vides.

(i) Soient $F_1', F_2' \in \mathscr{F}'$: il existe $V_1, V_2 \in \mathcal{V}(x_0)$ et $F_1, F_2 \in \mathscr{F}$ tels que $V_1 \cap F_1 \subseteq F_1'$ et $V_2 \cap F_2 \subseteq F_2'$. On a : $(V_1 \cap V_2) \cap (F_1 \cap F_2) \subseteq F_1' \cap F_2'$ avec $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(x_0)$ et $F_1 \cap F_2 \in \mathscr{F}$, donc $F_1' \cap F_2' \in \mathscr{F}'$.

(ii) Il est clair que toute partie de X contenant un élément de $\mathscr{F}'$ appartient elle-même à $\mathscr{F}'$.

Ainsi $\mathscr{F}$ est inclus dans le filtre $\mathscr{F}'$. De plus : $\mathcal{V}(x_0) \subseteq \mathscr{F}'$ donc $\mathscr{F}'$ converge vers x_0.

($\Longleftarrow$) On suppose que tout filtre sur X est inclus dans un filtre convergent.
Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouvert de X dont aucune famille finie extraite ne recouvre X, où $I \neq \emptyset$.

On pose : $\mathscr{F} = \{A \subseteq X \mid \exists n \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \quad \exists i_1, ..., i_n \in I \quad X\setminus(U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}) \subseteq A\}$.

On a facilement : $\mathscr{F}$ est un filtre sur X.

Par hypothèse, il existe un filtre $\mathscr{F}'$ sur X contenant $\mathscr{F}$ et $x_0 \in X$ tels que $\mathscr{F}'$ converge vers x_0.

Soit $i \in I$. Pour tout $V \in \mathcal{V}(x_0)$, comme $V \in \mathscr{F}'$ et $X\setminus U_i \in \mathscr{F}$, on a : $V \cap (X\setminus U_i) \in \mathscr{F}'$ puis $V \cap (X\setminus U_i) \neq \emptyset$; par conséquent x_0 est adhérent au fermé $X\setminus U_i$ de X, donc $x_0 \in X\setminus U_i$.

Finalement, $(U_i)_{i\in I}$ ne recouvre pas X car la réunion des $(U_i)_{i\in I}$ ne contient pas x_0. □

Théorème (« théorème de Tychonoff »)

Soient $X = \prod\limits_{i\in I} X_i$ un produit d'espaces topologiques compacts X_i, $i \in I$. On a : X est compact.

Démonstration

• On vérifie que X est séparé. Soient $x' = (x_i')_{i\in I}$ et $x'' = (x_i'')_{i\in I}$ deux éléments distincts de X.

Il existe $i_0 \in I$ tel que $x_{i_0}' \neq x_{i_0}''$, puis des ouverts U_{i_0}' et U_{i_0}'' de X_{i_0} tels que : $x_{i_0}' \in U_{i_0}'$ et $x_{i_0}'' \in U_{i_0}''$ avec $U_{i_0}' \cap U_{i_0}'' = \emptyset$. On pose : $U_i' = X_i$ et $U_i'' = X_i$ lorsque $i \neq i_0$.
Les ouverts $U' := \prod\limits_{i\in I} U_i'$ et $U'' := \prod\limits_{i\in I} U_i''$ de X vérifient : $x' \in U'$ et $x'' \in U''$ avec $U' \cap U'' = \emptyset$.

• D'après la proposition 1, tout filtre sur X est inclus dans un ultrafiltre.
On se donne donc un ultrafiltre $\mathscr{U}$ sur X, auquel cas $X \neq \emptyset$, et vérifie qu'il converge.

Soit $i \in I$. On note p_i la projection canonique de X sur X_i et $p_i(\mathscr{U}) = \{p_i(U)\ ;\ U \in \mathscr{U}\}$.

En utilisant le fait que $p_i^{-1}(p_i(U)) \supseteq U$ pour $U \in \mathscr{U}$, on obtient : $p_i(\mathscr{U})$ est un filtre sur X_i.

D'après la proposition 1 (b), $p_i(\mathscr{U})$ est un ultrafiltre car pour $A \subseteq X_i$ tel que $A \notin p_i(\mathscr{U})$, on a : $A = p_i(p_i^{-1}(A))$ donc $p_i^{-1}(A) \notin \mathscr{U}$, puis sachant que $\mathscr{U}$ est un ultrafiltre $X\setminus p_i^{-1}(A) \in \mathscr{U}$, enfin $X_i\setminus A = p_i(p_i^{-1}(X_i\setminus A)) = p_i(X\setminus p_i^{-1}(A)) \in p_i(\mathscr{U})$.

D'après la proposition 2, l'ultrafiltre $p_i(\mathscr{U})$ a une limite notée x_i dans le compact X_i.

On pose : $x = (x_i)_{i\in I}$. Soit $V \in \mathcal{V}(x)$. Il existe $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $i_1, .., i_n \in I$ distincts, un ouvert Ω_{i_1} de X_{i_1} contenant x_{i_1} et ... et un ouvert Ω_{i_n} de X_{i_n} contenant x_{i_n} tels que, en posant $\Omega_i = X_i$ lorsque $i \notin \{i_1, ..., i_n\}$, on a : $V \supseteq \prod\limits_{i\in I} \Omega_i$. Par convergence de $p_{i_k}(\mathscr{U})$ vers x_{i_k}, on a $\Omega_{i_k} \in p_{i_k}(\mathscr{U})$ donc $\Omega_{i_k} = p_{i_k}(U_{i_k})$ pour un certain $U_{i_k} \in \mathscr{U}$. Il en résulte que $V \supseteq U_{i_1} \cap \cdots U_{i_n}$ avec $U_{i_1} \cap \cdots U_{i_n} \in \mathscr{U}$.

En conclusion : $\mathscr{U}$ converge vers x.

• D'après la proposition 2, X est compact. □

Suites de fonctions différentiables (J-Y D)

Voici un résultat qui généralise le théorème « convergence uniforme et dérivabilité » de L2. On fixe des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés E et F de dimension finie (par exemple $E = \mathbb{R}^p$ et $F = \mathbb{R}^q$).

Proposition (« convergence uniforme + différentiabilité »)

Soient $f_n \colon \underset{\text{ouvert convexe de } E}{U} \longrightarrow F$, $n \in \mathbb{N}$, des applications vérifiant :

(i) il existe $x_0 \in U$ tel que la suite $\big(f_n(x_0)\big)_{n\geq 0}$ converge ;

(ii) les applications f_n, $n \in \mathbb{N}$ sont différentiables ;

(iii) la suite $(\mathrm{d}f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément.

Alors $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur toute partie bornée B de U, vers une fonction différentiable f telle que : $\mathrm{d}f(x) \cdot h = \big(\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{d}f_n(x)\big) \cdot h = \lim\limits_{n\to+\infty} (\mathrm{d}f_n(x) \cdot h)$ pour $x \in U$ et $h \in E$.

Démonstration

On se donne une partie bornée B de U. On va d'abord démontrer que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur B. Comme F est complet, l'ensemble F^B des applications de B dans F est complet pour la distance d_u de la convergence uniforme. Il suffit donc de vérifier que $(f_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy pour la convergence uniforme. Pour cela on relie les valeurs prises par f_n avec $f_n(x_0)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Pour $x \in B$ et $p > q$ dans $\mathbb{N}$, on a :

$\|f_p(x) - f_q(x)\| \leq \|(f_p - f_q)(x) - (f_p - f_q)(x_0)\| + \|f_p(x_0) - f_q(x_0)\|$

puis d'après l'inégalité des accroissements finis et par convexité de U :

$\|(f_p - f_q)(x) - (f_p - f_q)(x_0)\| \leq \|\mathrm{d}f_p - \mathrm{d}f_q\|_\infty \|x - x_0\| \leq \|\mathrm{d}f_p - \mathrm{d}f_q\|_\infty K$ où $K := \sup\limits_{b\in B}\|b\| + \|x_0\|$.

On choisit $Q \in \mathbb{N}$ tel que : $\|\mathrm{d}f_p - \mathrm{d}f_q\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2(K+1)}$ et $\|f_p(x_0) - f_q(x_0)\| < \frac{\varepsilon}{2}$ dès que $p > q \geq Q$.

Ainsi : $\sup_{x\in B}\|f_p(x) - f_q(x)\| \leq \frac{\varepsilon K}{2(K+1)} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ dès que $p > q \geq Q$.

Par conséquent, la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur toute partie bornée de U.

Pour tout $x \in U$, on note : $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ (cf. le cas où $B = \{x\}$) et $g(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{d}f_n(x)$. Il reste à démontrer que f est différentiable en tout $a \in U$ et $\mathrm{d}f(a) = g(a) = (h \mapsto \lim\limits_{n\to+\infty} (\mathrm{d}f_n(a) \cdot h))$.

Soit $\varepsilon > 0$. Pour $h \in E \setminus \{0\}$ tel que $a + h \in U$ et $q \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{\|f(a+h) - f(a) - g(a)\cdot h\|}{\|h\|} \leq \frac{\|\lim\limits_{p\to+\infty}((f_p - f_q)(a+h) - (f_p - f_q)(a))\|}{\|h\|} + \frac{\|f_q(a+h) - f_q(a) - \mathrm{d}f_q(a)\cdot h\|}{\|h\|} + \frac{\|(\mathrm{d}f_q(a) - g(a))\cdot h\|}{\|h\|}.$$

Or l'inégalité des accroissements finis donne : $\|(f_p - f_q)(a + h) - (f_p - f_q)(a)\| \leq \|\mathrm{d}f_p - \mathrm{d}f_q\|_\infty \|h\|$.

Il en résulte que : $(\star)$ $\frac{\|f(a+h) - f(a) - g(a)\cdot h\|}{\|h\|} \leq \|g - \mathrm{d}f_q\|_\infty + \frac{\|f_q(a+h) - f_q(a) - \mathrm{d}f_q(a)\cdot h\|}{\|h\|} + \|\mathrm{d}f_q - g\|_\infty$.

On choisit $Q \in \mathbb{N}$ tel que : $\|g - \mathrm{d}f_q\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$ dès que $q \geq Q$.

On prend maintenant $q = Q$ et choisit $\alpha > 0$ tel que : $\frac{\big\|f_Q(a+h) - f_Q(a) - \mathrm{d}f_Q(a)\cdot h\big\|}{\|h\|} < \frac{\varepsilon}{3}$ dès que $\|h\| < \alpha$.

Ainsi, on obtient à partir de l'inégalité $(\star)$: $\frac{\|f(a+h) - f(a) - g(a)\cdot h\|}{\|h\|} < \varepsilon$ dès que $\|h\| < \alpha$.

On en conclut que f est différentiable en a et $\mathrm{d}f(a) = g(a)$.

Pour terminer, on remarque que l'application linéaire $l \mapsto l(h)$ de $\mathscr{L}(E, F)$ dans F est continue. D'où : $\mathrm{d}f(a) \cdot h = g(a) \cdot h = \big(\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{d}f_n(a)\big)(h) = \lim\limits_{n\to+\infty} (\mathrm{d}f_n(a)(h))$ pour tout $h \in E$. $\square$

Convolution de distributions sur $\mathbb{R}^m$: complément (J-Y D)

Proposition

Soient $S \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^p)$ et $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^q)$. Pour tout $F \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q)$, on a :

$$y \mapsto \int_{\mathbb{R}^p} F(x,y)\,\mathrm{d}S(x) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^q) \quad \text{et} \quad x \mapsto \int_{\mathbb{R}^q} F(x,y)\,\mathrm{d}T(y) \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^p).$$

De plus, l'application $S \otimes T \colon F \longmapsto \int_{\mathbb{R}^q} \Big(\int_{\mathbb{R}^p} F(x,y)\,\mathrm{d}S(x) \Big)\,\mathrm{d}T(y) = \int_{\mathbb{R}^p} \Big(\int_{\mathbb{R}^q} F(x,y)\,\mathrm{d}T(y) \Big)\,\mathrm{d}S(x)$ est une distribution sur $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$. [En choisissant $S = D^\alpha \delta_0$, cela donne : $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}\big(\int_{\mathbb{R}^p} F(x,y)\,\mathrm{d}T(y)\big) = \int_{\mathbb{R}^p} \frac{\partial^{|\alpha|} F(x,y)}{\partial x^\alpha}\,\mathrm{d}T(y)$.]

Définition-Proposition

(a) On dit qu'une suite $(F_1, \dots, F_n)$ de fermés de $\mathbb{R}^m$ est *convolutive* si :

$$\|x_1 + \dots + x_n\| \xrightarrow[\substack{x_1 \in F_1, \dots, x_n \in F_n \\ \|x_1\| + \dots + \|x_n\| \to +\infty}]{} +\infty.$$

Exemples : cas où au plus un des fermés $F_1, \dots, F_n$ est non compact ; cas $m = 1$ et $F_1, \dots, F_n \subseteq \mathbb{R}^+$.

(b) Soient $T_1, \dots, T_n \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ tels que la suite $(\operatorname{Supp} T_1, \dots, \operatorname{Supp} T_n)$ est convolutive.

Il existe un unique $T_1 * \dots * T_n \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ tel que pour tout $M > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ vérifiant :

$$\langle T_1 * \cdots * T_n, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^m} \dots \int_{\mathbb{R}^m} \underbrace{\overbrace{\varphi(x_1 + \dots + x_n)}^{\text{fonction } C^\infty \text{ sur } (\mathbb{R}^m)^n}\,\chi_N(x_1) \dots \chi_N(x_n)}_{\text{fonction } C^\infty \text{ à support compact sur } (\mathbb{R}^m)^n}\,\overbrace{\underbrace{\mathrm{d}T_1(x_1) \dots \mathrm{d}T_n(x_n)}_{\text{distribution } T_1 \otimes \cdots \otimes T_n \text{ sur } (\mathbb{R}^m)^n}}^{\text{distribution à support compact sur } (\mathbb{R}^m)^n}$$

quand $\varphi \in \mathscr{D}(B(0,M))$, indépendamment du choix d'un $\chi_N \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$ tel que $\chi_{N\,|\overline{B(0,N)}} = 1$.

On a : $\operatorname{Supp}(T_1 * \dots * T_n) \subseteq \operatorname{Supp} T_1 + \dots + \operatorname{Supp} T_n$ et $\operatorname{Supp} T_1 + \dots + \operatorname{Supp} T_n$ est fermé dans $\mathbb{R}^m$.

Proposition

(a) Soient $T_1, \dots, T_n \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m) \backslash \{0\}$ tels que $(\operatorname{Supp} T_1, \dots, \operatorname{Supp} T_n)$ est convolutive et $1 \leq i \leq n-1$.

Les suites $(\operatorname{Supp} T_1, \dots, \operatorname{Supp} T_i)$, $(\operatorname{Supp} T_{i+1}, \dots, \operatorname{Supp} T_n)$, et $(\operatorname{Supp}(T_1 * \dots * T_i), \operatorname{Supp}(T_{i+1} * \dots * T_n))$ sont convolutives, et on a : $T_1 * \dots * T_n = (T_1 * \dots * T_i) * (T_{i+1} * \dots * T_n)$. ← [par contre : $\underbrace{(1 * \delta_0')}_{(1 * \delta_0)'} * H \neq 1 * \underbrace{(\delta_0' * H)}_{(\delta_0 * H)'}$]

(b) Soient $S, T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ tels que le couple $(\operatorname{Supp} S, \operatorname{Supp} T)$ est convolutif.

On a : $S * T = T * S$ et $D^\alpha(S * T) = (D^\alpha S) * T$ pour $\alpha \in \mathbb{N}^m$.

Proposition

(a) Soit μ_0 une mesure positive sur $\mathbb{R}^m$ qui est finie sur les compacts. Le support de la mesure de Radon μ associée à μ_0 est le plus petit fermé de $\mathbb{R}^m$ dont le complémentaire est μ_0-négligeable.

(b) Soient μ_0 et ν_0 des mesures positives sur $\mathbb{R}^m$ finies sur les compacts, associées à des mesures de Radon μ et ν de supports convolutifs. Pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m)$, on a :

$$\langle \mu * \nu, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x+y)\,\mathrm{d}\mu_0(x)\,\mathrm{d}\nu_0(y).$$

Proposition

Soient $f, g \in \mathcal{L}^{1loc}(\mathbb{R}^m)$ tels que le couple $(\operatorname{Supp}(f\,\mathrm{d}x), (\operatorname{Supp} g\,\mathrm{d}x))$ est convolutif.

On a : $(f\,\mathrm{d}x) * (g\,\mathrm{d}x) = (f * g)\,\mathrm{d}x$ où $f * g : x \mapsto \underbrace{\int_{\mathbb{R}^m} f(x-t)\,g(t)\,\mathrm{d}t}_{\text{défini presque partout}} \in L^{1loc}(\mathbb{R}^m)$.

Formule des résidus : à retenir (J-Y D)

Définition-Proposition

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une application de Ω dans $\mathbb{C}$.

On dit que f est *holomorphe* si elle vérifie l'une des trois propriétés équivalentes suivantes :
(i) pour tout $z_0 \in \Omega$, le quotient $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ a une limite (notée $f'(z_0)$) quand $z \to z_0$ avec $z \neq z_0$;
(ii) pour tout $z_0 \in \Omega$, f est différentiable en z_0 et $\mathrm{d}f(z_0)$ est $\mathbb{C}$-linéaire ;
[En posant $f(z) = P(z) + \mathrm{i}\, Q(z)$ avec $P(z), Q(z) \in \mathbb{R}$, cela s'écrit : f est différentiable sur Ω avec $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$ et $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$.]
(iii) pour tout $z_0 \in \Omega$, il existe $R > 0$ avec $B(z_0, R) \subseteq \Omega$ et une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ de nombres complexes, tels qu'on ait : $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,(z-z_0)^n$ pour tout $z \in B(z_0, R)$.

Dans ce cas, f est indéfiniment $\mathbb{C}$-dérivable au sens du (i), la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ s'écrit $\left(\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\right)_{n\geq 0}$, et l'égalité du (iii) est valable dans toute boule ouverte $B(z_0, R)$ de centre z_0 incluse dans Ω.

[En outre, toute application somme, ou produit, ou quotient, ou composée, de deux fonctions holomorphes est holomorphe (sous réserve d'être définie). Les formules usuelles pour les dérivées, ici au sens du (i), restent valables.]

Définition-Proposition

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur Ω.

(a) Pour toute « couronne » $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z-z_0| < r_2\}$ incluse dans Ω, il existe une unique famille $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ d'éléments de $\mathbb{C}$ telle que :

$$\forall z \in \mathcal{C} \quad f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\,(z-z_0)^n \qquad \text{« développement en série de Laurent de } f \text{ en } z_0 \text{ ».}$$

[Si $r_1 < r < r_2$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a : $a_n = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_{\mathscr{C}(z_0,r)^+} \frac{f(u)}{(u-z)^{n+1}}\,\mathrm{d}u$. Les a_n, $n \in \mathbb{Z}$, sont donc indépendants des choix de r_1 et r_2.]

(b) On considère une boule ouverte épointée $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z-z_0| < r\}$ incluse dans Ω.
Le *résidu de f en z_0*, noté $\mathrm{Res}(f, z_0)$ ou $\mathrm{Res}(f(z), z = z_0)$, est le coefficient a_{-1} du développement en série de Laurent de f en z_0.

(c) On dit qu'un point z_0 de Ω est un *pôle de multiplicité k* de f s'il existe $r > 0$ tel que $B(z_0, r)\backslash\{z_0\} \subseteq \Omega$ et l'ensemble des $n > 0$ tels que $\underbrace{a_{-n}}_{\text{associé à la couronne } B(z_0,r)\backslash\{z_0\}} \neq 0$ est non vide de plus grand élément k.

d) Soient $g, h\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphes et $z_0 \in \Omega$ tels que $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$ et $h'(z_0) \neq 0$.
Alors $\frac{g}{h}$ est holomorphe sur $\{h \neq 0\}$, z_0 est $\underbrace{\text{pôle de multiplicité 1}}_{\text{« pôle simple »}}$ de $\frac{g}{h}$, et $\boxed{\mathrm{Res}\left(\frac{g}{h}, z_0\right) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}}$.

Définition-Proposition

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$.

(a) Une *fonction méromorphe sur* Ω est une application holomorphe sur un ouvert de la forme $\Omega\backslash P$ où P est un fermé discret de Ω formé de pôles de f.

[Une partie D de Ω est dite « discrète » si tout point de D est centre d'une boule ouverte qui ne contient pas d'autre élément de D.]

(b) Soit Ω un ouvert connexe non vide de $\mathbb{C}$. L'ensemble des fonctions méromorphes sur Ω est un corps, en prolongeant par continuité (en particulier, il est stable par quotient).

Théorème

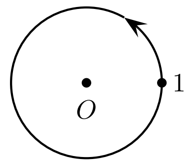
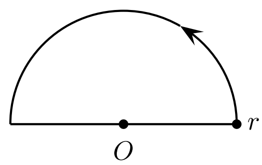
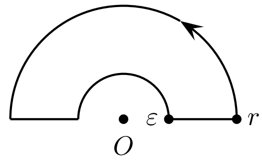
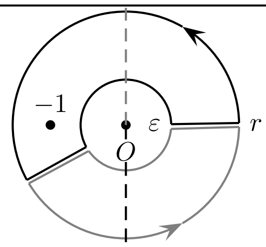
On considère un lacet γ homotope à un point dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ (par exemple un lacet γ quelconque dans un ouvert étoilé Ω de $\mathbb{C}$) et une fonction f holomorphe sur $\Omega\backslash S$ où S est un fermé discret dans Ω qui ne coupe pas l'image de γ (par exemple une fonction f méromorphe sur Ω sans pôle dans l'image de γ avec S égal à l'ensemble de ses pôles).

[Un lacet est une application continue $\gamma : [a,b] \to \Omega$ avec $\gamma(a) = \gamma(b)$. Il est dit *homotope à un point dans* Ω s'il existe une application continue $c : [0,1] \times [a,b] \to \Omega$ avec $c(s,a) = c(s,b)$ pour tout $s \in [0,1]$, telle que $c(0,\cdot) = \gamma$ et $c(1,\cdot)$ est constante.]

On a : $\boxed{\displaystyle\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\mathrm{i}\pi \sum_{z_0\in S} \underbrace{\mathrm{Ind}(\gamma,z_0)\ \mathrm{Res}(f,z_0)}_{\text{nombre fini de termes non nuls}}}$ « formule des résidus ».

[Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. L'indice $\mathrm{Ind}(\gamma,z_0)$ par rapport à z_0 d'un lacet γ dans $\mathbb{C}\backslash\{z_0\}$ est par définition le nombre $\frac{\theta(b)-\theta(a)}{2\pi} \in \mathbb{Z}$, obtenu indépendamment du choix d'une application continue $\theta : [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que $\frac{\gamma(t)-z_0}{|\gamma(t)-z_0|} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(t)}$ pour $t \in [a,b]$ (une telle θ existe). Concrètement, et on s'en tiendra à cette interprétation dans les calculs d'intégrales par la formule des résidus, l'indice de γ par rapport à z_0 correspond au nombre de tours dans le sens direct autour de z_0 qu'on décrit en parcourant γ dans le sens positif.]

Choix des lacets pour les calculs d'intégrales par la formule des résidus (R rationnelle)

Intégrale	Hypothèse sur R	$f(z)$	γ
$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$	$R(\cos\theta,\sin\theta)$ définis	$\frac{1}{\mathrm{i}z}\,R\big(\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}),\frac{1}{2\mathrm{i}}(z-\frac{1}{z})\big)$	
$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,\mathrm{d}x$	R sans pôle réel $\deg R \le -2$	$R(z)$	
$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\,\mathrm{d}x$ (converge en $\pm\infty$ par IPP)	R sans pôle réel $\deg R \le -1$	$R(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$	
$\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\Big(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} R(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\,\mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{+\infty} R(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\,\mathrm{d}x\Big)$ (converge en $\pm\infty$ par IPP)	R sans pôle dans $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 0 pôle simple de R $\deg R \le -1$	$R(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$	
$\int_0^{+\infty} R(x)\,x^\alpha\,\mathrm{d}x$ (resp. $\int_0^{+\infty} R(x)\,x^\alpha \ln x\,\mathrm{d}x$) avec $0<\alpha<1$	R sans pôle dans $\mathbb{R}^+\setminus\{0\}$ 0 non-pôle multiple de R $\deg R \le -2$	$R(z)\,\mathrm{e}^{\alpha\,\mathrm{Log}\,z}$ (resp. $R(z)\,\mathrm{e}^{\alpha\,\mathrm{Log}\,z}\,\mathrm{Log}\,z$)	
$\int_0^{+\infty} R(x)\ln x\,\mathrm{d}x$ [ou IPP si R a une primitive évidente]	R sans pôle dans $\mathbb{R}^+$ $\deg R \le -2$	$R(z)\,\mathrm{Log}\,z\,(\mathrm{Log}\,z - 2\mathrm{i}\pi)$ [ou $R(z)(\mathrm{Log}\,z)^2$ si est R réelle]	$f_+(z)$ avec Log_+ sur $\mathbb{C}\setminus\mathrm{i}\mathbb{R}^-$ et $f_-(z)$ avec Log_- sur $\mathbb{C}\setminus\mathrm{i}\mathbb{R}^+$ où $\mathrm{Log}_+(-1) = \mathrm{Log}_-(-1) = \mathrm{i}\pi$