

Boule fermée unité l^p dans \mathbb{R}^2 avec $0 < p \leq +\infty$ (J-Y D)

Rappel

(a) On dit qu'une application $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est *convexe* si :

$$\forall x, y \in I \quad \forall t \in [0, 1] \quad f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Dans ce cas f a des dérivées à droite et à gauche, donc continue, en tout point intérieur à I .

(b) Toute application continue $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ qui a une dérivée croissante sur I est convexe.

DÉMONSTRATION (du (b))

On se donne f comme dans (b). Soient $x, y \in I$ et $t \in [0, 1]$. On va vérifier l'inégalité du (a).

On applique le théorème des accroissements finis à f entre $a := tx + (1-t)y$ et $b \in I$ fixé.

Il existe $c \in]a, b[$ tel que : $f(b) = f(a) + (b-a)f'(c)$.

D'où, en distinguant les cas « $a \leq b$ » et « $a > b$ » : $f(b) \geq f(a) + (b-a)f'(a)$.

En choisissant d'une part $b := x$ et d'autre part $b := y$, on en déduit que :

$$f(x) \geq f(tx + (1-t)y) + (1-t)(x-y)f'(tx + (1-t)y)$$

$$\text{et } f(y) \geq f(tx + (1-t)y) - t(x-y)f'(tx + (1-t)y).$$

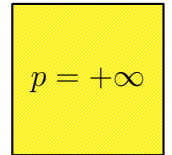
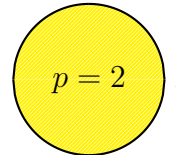
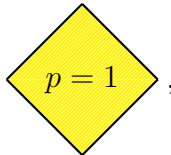
On obtient le résultat en additionnant t fois la 1^{re} inégalité et $1-t$ fois la 2^e inégalité. □

Cas $1 \leq p \leq +\infty$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On pose : $\|(x, y)\|_p = (|x|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p}}$ si $p \neq +\infty$, et $\|(x, y)\|_\infty = \max(|x|, |y|)$.

L'application $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une norme sur \mathbb{R}^2 .

Quelques boules fermées unité :



DÉMONSTRATION (de l'inégalité triangulaire)

Le cas $p = +\infty$ se traite directement sans difficulté. On suppose maintenant que $p \neq +\infty$.

Soient $X = (x, y), X' = (x', y') \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $M := (a, b) := \frac{X}{\|X\|_p}$, $M' := (a', b') := \frac{X'}{\|X'\|_p}$, $t := \frac{\|X\|_p}{\|X\|_p + \|X'\|_p}$.

Comme $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe, on a : $(tu + (1-t)v)^p \leq tu^p + (1-t)v^p$ pour tous $u, v \in \mathbb{R}^+$.

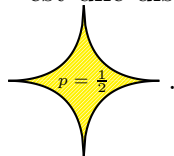
Donc : $\|tM + (1-t)M'\|_p \leq \underbrace{((t|a| + (1-t)|a'|)^p + (t|b| + (1-t)|b'|)^p)^{\frac{1}{p}}}_{\text{clair}} \leq (t \underbrace{\|M\|_p^p}_1 + (1-t) \underbrace{\|M'\|_p^p}_1)^{\frac{1}{p}} = 1$,
ce qui, grâce au choix de t , fournit finalement l'inégalité $\|X + X'\|_p \leq \|X\|_p + \|X'\|_p$. □

Cas $0 < p < 1$

Soient $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$ On pose : $d_p((x, y), (x', y')) = |x - x'|^p + |y - y'|^p$.

L'application $d_p : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une distance sur \mathbb{R}^2 .

Une boule fermée unité :



DÉMONSTRATION (de l'inégalité triangulaire)

Soient $X = (x, y), X' = (x', y'), X'' = (x'', y'') \in \mathbb{R}^2$. A-t-on $d_p(X, X'') \leq d_p(X, X') + d_p(X', X'')$?

Comme $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ est croissante, nulle en 0, et d'opposée convexe, on a :

$$g(u) + g(v) = \underbrace{g\left(\frac{u}{u+v}(u+v) + \frac{v}{u+v}(0)\right)}_{\geq \frac{u}{u+v}g(u+v) + \frac{v}{u+v}g(0)} + \underbrace{g\left(\frac{u}{u+v}(0) + \frac{v}{u+v}(u+v)\right)}_{\geq \frac{u}{u+v}g(0) + \frac{v}{u+v}g(u+v)} \geq g(u+v) \quad \text{pour tous } u, v \in \mathbb{R}^+.$$

isoler le cas $(u, v) = (0, 0)$

On prend (u, v) parmi $(|x - x'|, |x' - x''|)$ et $(|y - y'|, |y' - y''|)$, puis utilise la croissance de g :

$$|x - x'|^p + |x' - x''|^p \geq (|x - x'| + |x' - x''|)^p \geq |x - x''|^p$$

$$\text{et } |y - y'|^p + |y' - y''|^p \geq (|y - y'| + |y' - y''|)^p \geq |y - y''|^p.$$

On conclut en additionnant ces deux inégalités. □

Cas $1 < p, q < +\infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$: démonstration classique

On se donne $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

On pose : $\|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

(a) Soient $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

On a : $\sum_{k=1}^n |x_k| |y_k| \leq \|x\|_p \|y\|_q$.

(b) Soient $v = (v_1, \dots, v_n), w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$.

On a : $\|v + w\|_p \leq \|v\|_p + \|w\|_p$.

DÉMONSTRATION

(a) Sachant que l'application $\ln :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est concave, on a pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$:

$$\frac{1}{p} \ln \left(\frac{|x_k|^p}{(\|x\|_p)^p} \right) + \frac{1}{q} \ln \left(\frac{|y_k|^q}{(\|y\|_q)^q} \right) \leq \ln \left(\frac{1}{p} \frac{|x_k|^p}{(\|x\|_p)^p} + \frac{1}{q} \frac{|y_k|^q}{(\|y\|_q)^q} \right).$$

On applique exp aux inégalités précédentes puis additionne sur $k \in \{1, \dots, n\}$.

(b) On obtient, en utilisant (a) :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |v_k + w_k|^p &= \sum_{k=1}^n |v_k + w_k| |v_k + w_k|^{p-1} \leq \underbrace{\sum_{k=1}^n |v_k| |v_k + w_k|^{p-1}}_{(\|v + w\|_p)^{p-1}} + \underbrace{\sum_{k=1}^n |w_k| |v_k + w_k|^{p-1}}_{(\|v + w\|_p)^{p-1}} \\ &\leq \|v\|_p \underbrace{\left(\sum_{k=1}^n (|v_k + w_k|^{p-1})^q \right)^{\frac{1}{q}}}_{(\|v + w\|_p)^p} \leq \|w\|_p \underbrace{\left(\sum_{k=1}^n (|v_k + w_k|^{p-1})^q \right)^{\frac{1}{q}}}_{(\|v + w\|_p)^p} \end{aligned}$$

D'où le résultat. □