

Distributions sur un ouvert Ω de \mathbb{R}^m : à retenir (J-Y D)

Définition-Proposition

(a) On note, en ignorant en première lecture la notion de « topologie définie par des semi-norme » : $\mathcal{E}(\Omega)$ l'espace de Fréchet $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ pour les semi-normes $\varphi \mapsto \sup_{x \in K} |D^\alpha \varphi(x)|$ avec $K \subseteq \Omega$ et $\alpha \in \mathbb{N}^m$; $\mathcal{C}_c(\Omega) = \{\varphi \in \mathcal{C}(\Omega) \mid \text{Supp } \varphi \text{ compact}\}$ et $\mathcal{C}_K(\Omega) = \{\varphi \in \mathcal{C}(\Omega) \mid \text{Supp } \varphi \subseteq K\}$, $K \subseteq \Omega$ fixé; $\mathcal{D}_K(\Omega)$ le fermé $\mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap \mathcal{C}_K(\Omega)$ de $\mathcal{E}(\Omega)$ muni de la topologie induite, $K \subseteq \Omega$ fixé; $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace vectoriel $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega) = \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \mid \text{Supp } \varphi \text{ compact}\}$ muni de la famille des semi-normes dont les restrictions à tous les sous-espaces vectoriels $\mathcal{D}_K(\Omega)$, $K \subseteq \Omega$, sont continues.

(b) On note $\mathcal{D}'(\Omega) := \mathcal{D}(\Omega)'$ l'espace des *distributions sur Ω* , $\mathcal{E}'(\Omega) := \mathcal{E}(\Omega)'$ l'espace des *distributions à support compact sur Ω* , et $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m) := \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)'$ l'espace des *distributions tempérées sur \mathbb{R}^m* .

Les espaces vectoriels $\mathcal{D}'(\Omega)$, $\mathcal{E}'(\Omega)$, et $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ sont caractérisés par :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}'(\Omega) &= \left\{ T \in \mathcal{D}(\Omega)^* \mid \forall K \subseteq \Omega \text{ compact } \exists N \in \mathbb{N} \exists M \geq 0 \forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega) |T(\varphi)| \leq M \max_{|\alpha| \leq N} \|D^\alpha \varphi\|_\infty \right\}^{(*)}; \\ \mathcal{E}'(\Omega) &= \left\{ T \in \mathcal{E}(\Omega)^* \mid \exists K \subseteq \Omega \text{ compact } \exists N \in \mathbb{N} \exists M \geq 0 \forall \varphi \in \mathcal{E}(\Omega) |T(\varphi)| \leq M \max_{|\alpha| \leq N} \sup_{x \in K} |D^\alpha \varphi(x)| \right\}; \\ \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m) &= \left\{ T \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)^* \mid \exists N \in \mathbb{N} \exists M \geq 0 \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m) |T(\varphi)| \leq M \max_{|\alpha| \leq N} \|(1 + \|x\|^2)^N D^\alpha \varphi\|_\infty \right\}. \end{aligned}$$

On dit que $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ comme ci-dessus est *d'ordre fini* quand on peut choisir N indépendant de K ; le plus petit N indépendant de K qui convienne est alors appelé *ordre* de la distribution T .

On pose : $\langle T, \varphi \rangle = T(\varphi)$ quand $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. De même dans $\mathcal{E}(\Omega)$ et $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$.

(c) L'espace $\mathcal{M}(\Omega)$ des *mesures de Radon sur Ω* est défini par :

$$\mathcal{M}(\Omega) = \left\{ \mu \in \mathcal{C}_c(\Omega)^* \mid \forall K \subseteq \Omega \text{ compact } \exists M \geq 0 \forall \varphi \in \mathcal{C}_K(\Omega) |\mu(\varphi)| \leq M \|\varphi\|_\infty \right\}.$$

Si $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ vérifie $\mu(\varphi) \geq 0$ quand $\varphi \geq 0$: il existe une unique mesure positive μ_0 sur la tribu borélienne de Ω qui est finie sur les compacts, et telle que $\mu(\varphi) = \int_\Omega \varphi(x) d\mu_0(x)$ pour $\varphi \in \mathcal{C}_c(\Omega)$.

Définition-Proposition

(a) Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Pour $U \subseteq \Omega$, on définit $T|_U \in \mathcal{D}'(U)$ par $\langle T|_U, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$ quand $\varphi \in \mathcal{D}(U)$, où on a identifié φ à son prolongement par 0 hors de U (terme de droite de l'égalité).

Le *support de T* , noté $\text{Supp } T$, est le complémentaire du plus grand ouvert U de Ω tel que $T|_U = 0$.

[Soient $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_n \subseteq \mathbb{R}^m$ et $K \subseteq \bigcup_{1 \leq k \leq n} \mathcal{O}_k$. Il existe $u_1, \dots, u_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ tels que $\sum_{k=1}^n u_k|_K = 1$ avec $0 \leq u_k \leq 1$ et $\text{Supp } u_k \subseteq \mathcal{O}_k$ ($1 \leq k \leq n$).]

(b) L'injection canonique $\mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathcal{E}(\Omega)$ est continue d'image dense.

L'application linéaire $\mathcal{E}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ est injective d'image $\underbrace{\{T \in \mathcal{D}'(\Omega) \mid \text{Supp } T \text{ compact}\}}_{\text{noté } \mathcal{D}'_c(\Omega), \text{ donc formé de distributions d'ordre fini}}$.

$$S \longmapsto S|_{\mathcal{D}(\Omega)}$$

(c) Les applications linéaires suivantes sont injectives(**) :

$$\begin{array}{ccc} L^{1loc}(\Omega) & \longrightarrow & \mathcal{D}'(\Omega) \quad \text{et} \quad \mathcal{M}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega) \\ f & \longmapsto & (f dx: \varphi \mapsto \int_\Omega \varphi(x) f(x) dx) \quad \mu \longmapsto (\mu|_{\mathcal{D}(\Omega)}: \varphi \mapsto \int_\Omega \varphi(x) d\mu(x)) \end{array}$$

On pose : $\int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) dT(x) = \langle T, \varphi \rangle$ quand $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. De même dans $\mathcal{E}(\Omega)$ et $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$.

(c) Soit $1 \leq p' \leq +\infty$. L'injection canonique $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \rightarrow L^{p'}(\mathbb{R}^m)$ est continue d'image dense.

Soit $1 \leq p \leq +\infty$. L'application linéaire $L^p(\mathbb{R}^m) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ est injective.

$$f \longmapsto (f dx: \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) f(x) dx)$$

(d) Les injections canoniques $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \rightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R}^m)$ sont continues d'images denses.

Les applications $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^m) \mapsto S|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ et $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m) \mapsto T|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ sont injectives.

(*) On peut démontrer qu'une forme linéaire T sur $\mathcal{D}(\Omega)$ est continue si et seulement pour toute suite $(\varphi_n)_{n \geq 0}$ d'éléments $\mathcal{D}(\Omega)$ qui converge dans $\mathcal{D}(\Omega)$ vers un élément φ de $\mathcal{D}(\Omega)$, ce qui signifie que les φ_n et φ appartiennent à un même sous-espace vectoriel $\mathcal{D}_K(\Omega)$ dans lequel $(\varphi_n)_{n \geq 0}$ converge vers φ , on a : $T(\varphi_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} T(\varphi)$.

(**) Cette injectivité, lorsqu'on remplace Ω par un ouvert quelconque de \mathbb{R}^m , montre que : $\text{Supp}(f dx) = \text{Supp } f$.

Définition-Proposition

(a) Soient $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, et $\alpha \in \mathbb{N}^m$. On définit $fT \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ par :

$$\langle fT, \varphi \rangle = \langle T, f\varphi \rangle \quad \text{et} \quad \langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle \quad \text{pour } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Cela prolonge le produit de f par les éléments de $L^{1loc}(\Omega)$ et l'action de D^α sur $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

(b) On note : $\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^m) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m) \mid \forall \alpha \in \mathbb{N}^m \exists N \in \mathbb{N} \|(1 + \|x\|^2)^{-N} D^\alpha f\|_\infty < +\infty\}$.

Soient $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$, $f \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^m)$ par exemple polynomiale, et $\alpha \in \mathbb{N}^m$.

On définit $fT \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ et $D^\alpha T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ par les formules du (a) pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$.

(c) Soient $-\infty \leq a < x_1 < \dots < x_n < b \leq +\infty$ et une fonction $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{C}$ tels que $f|_{]a, x_1[}$, $f|_{]x_1, x_2[}$, \dots , $f|_{]x_n, b[}$ ont des prolongements de classe C^1 à $]a, x_1]$, $[x_1, x_2]$, \dots , $[x_n, b]$.

On a : $(f dx)^\vee = (f' dx) + \sum_{k=1}^n (f(x_k^+) - f(x_k^-)) \delta_{x_k}$ dans $\mathcal{D}'(]a, b[)$ « formule des sauts ».

Exemples

(a) Soit $a \in \mathbb{R}^m$. La « mesure de Dirac en a » est la distribution tempérée $\delta_a : \varphi \mapsto \varphi(a)$ sur \mathbb{R}^m .

(b) La « fonction de Heaviside » $H := \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+} dx$ est une distribution tempérée sur \mathbb{R} avec $H' = \delta_0$.

Définition-Proposition

(a) Soient $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ tels que $\text{Supp } S$ ou $\text{Supp } T$ est compact. ← [par exemple : $S = \delta_0$]

On définit $S * T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ par les égalités suivantes pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$:

$$\langle S * T, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^m} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x+y) dS(x) \right)}_{(\check{S} * \varphi)(y) \text{ qui est } C^\infty \text{ en } y} dT(y) = \int_{\mathbb{R}^m} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x+y) dT(y) \right)}_{(\varphi * \check{T})(x) \text{ qui est } C^\infty \text{ en } x} dS(x). \quad \leftarrow [\delta_0 * T = T]$$

On a : $\text{Supp}(S * T) \subseteq \overline{\text{Supp } S + \text{Supp } T}$, $S * T = T * S$ et $(S * T)^\vee = \check{S} * \check{T}$.

(b) Soit (f, T) dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m) \times \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ ou $\mathcal{E}(\mathbb{R}^m) \times \mathcal{E}'(\mathbb{R}^m)$ ou $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \times \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$.

On a : $f dx * T = (f * T) dx$ où $f * T : x \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} f(x-y) dT(y)$ est de classe C^∞ .

Soient $f, g \in \mathcal{L}^{1loc}(\mathbb{R}^m)$ tels que $\text{Supp } f$ ou $\text{Supp } g$ est compact.

On a : $(f dx) * (g dx) = (f * g) dx$ où $f * g : x \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} f(x-t) g(t) dt$ est défini presque partout.

(c) Soient $S, T, U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ tels que deux des supports $\text{Supp } S$, $\text{Supp } T$, $\text{Supp } U$ sont compacts.

On a : $S * (T * U) = (S * T) * U$. ← [à utiliser avec l'égalité $\langle T, \varphi \rangle = \langle \check{\varphi} * T, 0 \rangle$]

(d) Soient $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ avec un des deux supports compact, ou, $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ et $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$.

On a : $D^\alpha(S * T) = (D^\alpha S) * T$ pour $\alpha \in \mathbb{N}^m$. E est « solution fondamentale de D »

(e) Soient $D \in \mathbb{C}[\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}]$ et $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ (resp. $E \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$) tel que $\overbrace{DE}^{\delta_0} = \delta_0$.

Pour tout $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^m)$ (resp. $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$), la distribution $T := E * S$ vérifie $DT = S$.

Définition-Proposition

(a) On prolonge les applications $L^1(\mathbb{R}^m) \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m)$ et $L^2(\mathbb{R}^m) \xrightarrow{\mathcal{F}} L^2(\mathbb{R}^m)$ en une bijection linéaire $\mathcal{F}_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ de réciproque $(2\pi)^{-m} \overline{\mathcal{F}}_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$.
 $T \mapsto (\hat{T} : \varphi \mapsto T(\mathcal{F}\varphi)) \quad T \mapsto (\varphi \mapsto (2\pi)^{-m} T(\overline{\mathcal{F}}\varphi))$

(b) On note $\langle \check{\check{T}}, \varphi \rangle = \langle T, \check{\varphi} \rangle$ quand $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. On a :

$$\mathcal{F}\check{\check{T}} = (\mathcal{F}T)^\vee = \overline{\mathcal{F}}T \quad \text{pour tout } T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m).$$

(c) Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$. On a : $(D^\alpha T)^\wedge = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \hat{T}$ et $D^\alpha \hat{T} = ((-i)^{|\alpha|} x^\alpha T)^\wedge$ pour $\alpha \in \mathbb{N}^m$.

(d) Soient $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ et $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^m)$. On obtient $S * T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ qui envoie $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ sur :

$$\langle S * T, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^m} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x+y) dS(x) \right)}_{(\check{S} * \varphi)(y) \text{ où } \check{S} * \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)} dT(y).$$

De plus : $\widehat{S * T} = \hat{S} \hat{T}$ où $\hat{T} \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^m)$ avec $\hat{T}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^m} e^{-i\xi \cdot x} dT(x)$ pour $\xi \in \mathbb{R}^m$.

En particulier : $f * T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ quand $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ et $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^m)$.