Formes linéaires continues : à retenir (J-Y D)

Soient E, F, et G des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition-Proposition (hors programme pour (b) et (c))

Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

(a) Une *semi-norme* sur V est une application $p\colon V \to \mathbb{R}^+$ vérifiant :
(i) $\forall v \in V \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad p(\lambda v) = |\lambda|\, p(v)$;
(ii) $\forall v, w \in V \quad p(v+w) \leq p(v) + p(w)$.

(b) On appelle structure d'« espace vectoriel topologique » sur V une topologie sur V pour laquelle les applications $\begin{array}{rcl} V \times V & \to & V \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array}$ et $\begin{array}{rcl} \mathbb{K} \times V & \to & V \\ (\lambda, x) & \mapsto & \lambda x \end{array}$ sont continues.

Dans ce cas, on note V' l'ensemble des formes linéaires continues sur V.

(c) On se donne une famille $(p_i)_{i \in I}$ de semi-normes sur V. Les *boules ouvertes* associées sont :

$$B_{i_1,\dots,i_m}(x_0, \varepsilon) := \Big\{ x \in V \;\Big|\; \max_{i \in \{i_1,\dots,i_m\}} p_i(x - x_0) < \varepsilon \Big\} \quad \text{où } x_0 \in V \text{ et } \varepsilon > 0.$$

Les réunions de boules ouvertes munissent V d'une structure d'espace vectoriel topologique.
(Les ouverts de V sont les $U \subseteq V$ tels que tout $x \in U$ est centre d'une boule ouverte incluse dans U.)

Une forme linéaire $l : V \to \mathbb{K}$ est continue pour cette topologie si et seulement si :

$$\exists i_1, \dots, i_m \in I \quad \exists M \geq 0 \quad \forall x \in V \qquad |l(x)| \;\leq\; M \max_{i \in \{i_1,\dots,i_m\}} p_i(x).$$

Définition-Proposition (hors programme)

Soient V et W des espaces vectoriels topologiques.

On note $\mathcal{L}(V, W)$ l'ensemble des applications linéaires continues de V dans W.

Soit $T \in \mathcal{L}(V, W)$. On définit $T' \in \mathcal{L}(W', V')$ par : $\quad T'(f) = f \circ T \quad$ pour tout $f \in W'$.

Théorème (« théorème de Hahn-Banach ») ⟵[cf. « forme analytique du théorème de Hahn-Banach » entre parenthèses]

Toute forme linéaire continue f sur un sous-espace vectoriel V de E se prolonge à E en une forme linéaire continue $\widetilde{f}$ de même norme.(*)

(Soient U un espace vectoriel réel, p une semi-norme sur U, et V un sous-espace vectoriel de U.
Toute forme linéaire l sur V majorée par $p_{|V}$ se prolonge à U en une forme linéaire $\widetilde{l}$ majorée par p.
On en déduit le théorème avec U égal à l'espace vectoriel réel associé à E, $l := \operatorname{Re} f$ et $p(x) := \|l\| \|x\|$.)

Corollaire

(a) Pour tout $x_0 \in E \setminus \{0\}$, il existe $f \in E'$ tel que : $\quad f(x_0) = \|x_0\| \quad$ et $\quad \|f\| = 1$. ← [prendre $V = \mathbb{K}x_0$]
Ainsi, un vecteur x_0 de E est nul si et seulement si tout élément de E' s'annule dessus.(**)

(b) Soient V un sous-espace vectoriel de E et $x_0 \in E$. On a : $x_0 \in \overline{V}$ si et seulement si toute $f \in E'$ qui est nulle sur V est nulle en x_0. ← [appliquer (a) à $E/\overline{V}$ muni de $\|u\| := \inf_{x \in u} \|x\|$ pour $u \in E/\overline{V}$ et au vecteur $\dot{\widehat{x_0}}$]

Par conséquent, $A \subseteq E$ vérifie $\underbrace{\overline{\mathrm{Vect}(A)} = E}_{\text{« } A \text{ est une partie totale de } E \text{ »}}$ si et seulement si toute $f \in E'$ nulle sur A est nulle.

(c) On suppose que E' est séparable. Alors E est séparable.

(*) Le théorème reste vrai dans un espace vectoriel topologique de topologie définie par une famille de semi-normes.

(**) On note $\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}([0,1]) := \big\{ f\colon [0,1] \to \mathbb{C} \text{ mesurable} \mid \int_{[0,1]} |f(x)|^{\frac{1}{2}}\, \mathrm{d}x < +\infty \big\}$ puis $L^{\frac{1}{2}}([0,1]) := \mathcal{L}^{\frac{1}{2}}([0,1])/\mathcal{N}$ où $\mathcal{N}$ est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}^{\frac{1}{2}}([0,1])$ formé des fonctions mesurables nulles presque partout.
On munit $L^{\frac{1}{2}}([0,1])$ de la distance $d_{\frac{1}{2}}$ définie par : $d_{\frac{1}{2}}(f,g) := \int_{[0,1]} |f(x) - g(x)|^{\frac{1}{2}}\, \mathrm{d}x$ pour tous $f, g \in L^{\frac{1}{2}}([0,1])$.
On peut montrer que l'espace vectoriel topologique $L^{\frac{1}{2}}([0,1])$ vérifie : $L^{\frac{1}{2}}([0,1]) \neq \{0\}$ mais $L^{\frac{1}{2}}([0,1])' = \{0\}$.

Théorème (« théorème de séparation des convexes ») $\longleftarrow$[« forme géométrique du théorème de Hahn-Banach »]

Soient A et B deux convexes disjoints de E avec $\mathbb{K}=\mathbb{R}$.

(a) On suppose A ouvert de E. Il existe $\varphi \in E'$ tel que : $\sup\limits_{x\in A}\varphi(x) \leq \inf\limits_{x\in B}\varphi(x)$.

(b) On suppose A compact et B fermé de E. Il existe $\varphi \in E'$ tel que : $\sup\limits_{x\in A}\varphi(x) < \inf\limits_{x\in B}\varphi(x)$.

Définition

(a) Soient $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de E et $x\in E$. On dit que $(x_n)_{n\geq 0}$ converge faiblement dans E vers x, et note $x_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} x$, si : $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$ pour tout $f\in E'$. $\longleftarrow$[convergence simple dans $\mathbb{K}^{E'}$]

Lorsqu'elle existe, la limite faible x de $(x_n)_{n\geq 0}$ est unique.

(b) Soient $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de E' et $f\in E$. On dit que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge faiblement-$*$ dans E' vers f, et note $f_n \underset{n\to+\infty}{\overset{*}{\rightharpoonup}} f$, si : $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$ pour tout $x\in E$. $\longleftarrow$[convergence simple dans $\mathbb{K}^{E}$]

Remarques

(a) Si $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers x dans E, alors $(x_n)_{n\geq 0}$ converge faiblement vers x dans E.

(b) Si $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers f dans E', alors $(f_n)_{n\geq 0}$ converge faiblement-$*$ vers f dans E'.

(c) Si $(x_n)_{n\geq 0}$ converge faiblement vers x dans E,
alors $(x_n)_{n\geq 0}$ est bornée dans E et $\|x\| \leq \liminf\limits_{n\to+\infty}\|x_n\|$. $\longleftarrow$[théorème de Banach-Steinhaus dans $(E')'$]

(c) Si E est un espace de Banach et $(f_n)_{n\geq 0}$ converge faiblement-$*$ vers f dans E',
alors $(f_n)_{n\geq 0}$ est bornée dans E' et $\|f\| \leq \liminf\limits_{n\to+\infty}\|f_n\|$. $\longleftarrow$[théorème de Banach-Steinhaus dans E']

(d) Si $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers x dans E et $(f_n)_{n\geq 0}$ converge faiblement-$*$ vers f dans E' (resp. $(x_n)_{n\geq 0}$ converge faiblement vers x dans E et $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers f dans E'), alors $f_n(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$.

Définition (hors programme)

(a) La topologie faible sur E est la topologie, notée $\sigma(E,E')$, des semi-normes $x\mapsto|\varphi(x)|$, $\varphi\in E'$.

(b) La topologie faible-$*$ sur E' est la topologie, notée $\sigma(E',E)$, des semi-normes $\varphi\mapsto|\varphi(x)|$, $x\in E$.

Théorème (« théorème de Banach-Alaoglu »)

On suppose que E est séparable.

Toute suite bornée d'éléments de E' a une suite extraite qui converge faiblement-$*$.

Définition-Proposition

(a) On appelle *bidual topologique de* E et note E'' le dual topologique $(E')'$ de E'.

(b) L'application linéaire $j\colon x\mapsto (f\mapsto f(x))$ de E dans E'' conserve la norme, donc est injective.

(c) On dit que E *est réflexif* si cette application canonique de E dans E'' est surjective.

Exemples

(a) Tout espace de Hilbert est réflexif.

(b) L'espace de Banach $L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ est réflexif lorsque $(X,\mathcal{A},\mu)$ est un espace mesuré et $p\in]1,+\infty[$.

Théorème

On suppose que E est réflexif.

Toute suite bornée d'éléments de E a une suite extraite faiblement convergente.