

Espaces de fonctions continues : à retenir (J-Y D)

Soient A un ensemble, (X, \mathcal{T}) un espace topologique, et (Y, d) un espace métrique.

penser à « (X, δ) un espace métrique »

Notations

(a) On note Y^A l'ensemble des applications de A dans Y .

(b) On note $\mathcal{C}(X, Y)$ l'ensemble des applications continues de X dans Y et $\mathcal{C}(X) = \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$.

(c) On note : $(Y^A)_b = \{f: A \rightarrow Y \mid \exists M \geq 0 \quad \forall x, y \in A \quad d(f(x), f(y)) \leq M\}$.

Les éléments de $(Y^A)_b$ s'appellent les *applications bornées de A dans Y* .

(d) On note $\mathcal{C}_b(X, Y) = \{f \in \mathcal{C}(X, Y) \mid f \text{ bornée}\}$ et $\mathcal{C}_b(X) = \mathcal{C}_b(X, \mathbb{C})$.

Définition-Proposition

On pose, quand f et g sont des applications de A dans Y :

$$d_\infty(f, g) := \sup_{x \in A} d(f(x), g(x)) \leq +\infty \quad \text{et} \quad d_u(f, g) := \min(d_\infty(f, g), 1).$$

(a) Les couples (Y^A, d_u) et $((Y^A)_b, d_\infty)$ sont des espaces métriques. De plus l'application identité de $(Y^A)_b$ est uniformément continue de $((Y^A)_b, d_\infty)$ dans $((Y^A)_b, d_u)$ et de $((Y^A)_b, d_u)$ dans $((Y^A)_b, d_\infty)$.

(b) On dit qu'une suite $(f_n)_{n \geq 0}$ d'applications de A dans Y *converge simplement* vers une application f de A dans Y si : $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(x)$ pour tout $x \in A$.

On exprimera cette convergence simple par : $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{simplement}} f$. (*)

(c) On dit qu'une suite $(f_n)_{n \geq 0}$ d'applications de A dans Y *converge uniformément* vers une application f de A dans Y si : $d_\infty(f_n, f) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$. Dans ce cas $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement vers f .

On exprimera cette convergence uniforme par : $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{uniformément}} f$. (**)

(d) La partie $(Y^A)_b$ de Y^A est fermée pour la distance d_u .

La partie $\mathcal{C}(X, Y)$ de Y^X est fermée pour la distance d_u .

(e) On dit qu'une suite $(f_n)_{n \geq 0}$ d'applications de X dans Y *converge uniformément sur tout compact* vers une application f de X dans Y si : $f_n|_K \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{uniformément}} f|_K$ pour tout compact K de X .

On exprimera cette convergence uniforme sur tout compact par : $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{uniformément sur les compacts}} f$. (***)

(f) On suppose que X est un ouvert de \mathbb{R}^p . Avec les notations du (e), on a :

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{uniformément sur les compacts}} f \iff \forall a \in X \quad \exists r > 0 \quad f_n|_{B_X(a, r)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{uniformément}} f|_{B_X(a, r)}.$$

Proposition (« critère de Cauchy uniforme »)

On suppose que Y est complet.

(a) L'espace métrique (Y^A, d_u) est complet.

(b) Une suite $(f_n)_{n \geq 0}$ d'applications de A dans Y converge uniformément vers une application f de A dans Y si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall p, q \in \mathbb{N} \quad (p \geq N \text{ et } q \geq N \implies \forall x \in A \quad d(f_p(x), f_q(x)) < \varepsilon).$$

(*) On a : $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{simplement}} f \iff \forall x \in A \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq N \implies d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon)$.

La condition « $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{simplement}} f$ » signifie que $(f_n)_{n \geq 0}$ converge vers f dans l'espace topologique $\prod_{x \in A} Y$. Les voisinages de f dans $\prod_{x \in A} Y$ sont les parties contenant un $\{g \in Y^A \mid \max_{1 \leq i \leq n} d(g(x_i), f(x_i)) < \varepsilon\}$ avec $x_1, \dots, x_n \in A$ et $\varepsilon > 0$.

(**) On a : $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{uniformément}} f \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq N \implies \forall x \in A \quad d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon)$.

La condition « $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{uniformément}} f$ » signifie que $(f_n)_{n \geq 0}$ converge vers f dans l'espace métrique (Y^A, d_u) .

(***) La condition « $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{uniformément sur les compacts}} f$ » signifie que $(f_n)_{n \geq 0}$ converge vers f pour la topologie sur Y^X où les voisinages de f sont les parties contenant un $\{g \in Y^A \mid d_\infty(g|_K, f|_K) < \varepsilon\}$ avec K compact de X et $\varepsilon > 0$.

Définition

- (a) On dit que X est séparable s'il existe une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ de points de X d'image $\{x_n\}_{n \geq 0}$ dense.
- (a) On dit que X est à base dénombrable s'il existe une suite $(U_n)_{n \geq 0}$ de parties de X telle que les ouverts de X sont les réunions de certains U_n , $n \in \mathbb{N}$.
- (b) On dit qu'une partie U de X est relativement compacte dans X si \bar{U} est compacte.
- (c) On dit que Y est précompact si : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \exists y_1, \dots, y_n \in Y \quad Y \subseteq B(y_1, \varepsilon) \cup \dots \cup B(y_n, \varepsilon)$.

Proposition

- (a) Tout espace métrique compact est séparable.
- (b) Un espace métrique est séparable si et seulement si il est à base dénombrable.
- (c) Un espace métrique est compact si et seulement si il est précompact et complet.

Définition

Soit H une partie de Y^X . On dit que H est équicontinue en un point x_0 de X si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists V \underset{\text{voisinage de } x_0}{\subseteq} X \quad \forall x \in X \quad (x \in V \implies \forall h \in H \quad d(h(x), h(x_0)) < \varepsilon).$$

Dans le cas où X est un espace métrique, cela équivaut à :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in X \quad (d(x, x_0) < \alpha \implies \forall h \in H \quad d(h(x), h(x_0)) < \varepsilon).$$

On dit que H est équicontinue si elle est équicontinue en tout point de X .^(*)

Théorème (« théorème d'Arzelà-Ascoli »)

Soit H une partie de l'ensemble Y^X des applications de X dans Y .

On note : $H(x) = \{h(x) ; h \in H\}$ pour tout $x \in X$.

On suppose que X est compact, ce qui permet de munir $\mathcal{C}(X, Y)$ de la distance d_∞ .

Si H est équicontinue et les parties $H(x)$ de Y , $x \in X$, sont relativement compactes, alors H est relativement compacte dans $\mathcal{C}(X, Y)$.^(**)

Définition

Soit H un ensemble d'applications de X dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . On dit que :

- H est une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X, \mathbb{K})$ si H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(X, \mathbb{K})$ stable par produit ;
- H est auto-conjuguée si H est stable par passage aux applications conjuguées ;
- H est séparante (ou « sépare les points ») si pour tous $x, y \in X$, il existe $h \in H$ tel que $h(x) \neq h(y)$;
- H contient les constantes si H contient l'ensemble des applications constantes de X dans \mathbb{K} .

Théorème (« théorème de Stone-Weierstrass »)

On suppose que X est compact, ce qui permet de munir $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ et $\mathcal{C}(X)$ de la distance d_∞ .

(a) Si H est une sous-algèbre séparante de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ qui contient les constantes, alors H est dense dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

(b) Si H est une sous-algèbre auto-conjuguée séparante de $\mathcal{C}(X)$ qui contient les constantes, alors H est dense dans $\mathcal{C}(X)$.

Corollaire (« théorème de Weierstrass »)

L'espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles (resp. complexes) sur un segment $[a, b]$ de \mathbb{R} est dense dans $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{C}([a, b])$) muni de la norme de la convergence uniforme.

(*) Par abus, on dira qu'une suite $(f_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de Y^X est équicontinue si son image $\{f_n\}_{n \geq 0}$ est équicontinue.

(**) La réciproque, peu utile, est vraie. Elle découle du fait que l'espace métrique \bar{H} est précompact lorsque H est relativement compacte, et que les applications $h \mapsto h(x_0)$ sont 1-lipschitziennes.