Transformée de Fourier sur $\mathbb{R}^m$: à retenir (J-Y D)

Définition-Proposition

(a) Soit $f\in L^1(\mathbb{R}^m)$. On pose : $\mathcal{F}f(\xi)=\displaystyle\int_{\mathbb{R}^m} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\cdot x}\mathrm{d}x$ et $\overline{\mathcal{F}}f(\xi)=\displaystyle\int_{\mathbb{R}^m} f(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\cdot x}\mathrm{d}x$ $(\xi\in\mathbb{R}^m)$.

La fonction $\mathcal{F}f$, notée aussi $\widehat{f}$, appartient à $\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^m):=\left\{g\in\mathscr{C}(\mathbb{R}^m)\ \middle|\ g(\xi)\xrightarrow[\|\xi\|\to+\infty]{}0\right\}$.

(b) L'application linéaire $\begin{array}{rccc}\mathcal{F}_{L^1(\mathbb{R}^m)}: & L^1(\mathbb{R}^m) & \to & \mathscr{C}_0(\mathbb{R}^m)\\ & f & \mapsto & \widehat{f}\end{array}$ est injective et $\underbrace{\text{continue}}_{\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^m)\text{ est muni de }\|\ \|_\infty\text{ et }\|\widehat{f}\|_\infty\le\|f\|_1}$.

(c) Si $f\in L^1(\mathbb{R}^m)$ est telle que $\widehat{f}\in L^1(\mathbb{R}^m)$, on a :
$f(x)=(2\pi)^{-m}\,\overline{\mathcal{F}}\widehat{f}(x)$ presque partout « théorème de réciprocité ».

Définition-Proposition

On prolonge $\mathcal{F}|_{L^1(\mathbb{R}^m)\cap L^2(\mathbb{R}^m)}$ à $L^2(\mathbb{R}^m)$ (argument de densité) en une bijection linéaire

$$\begin{array}{rccl}\mathcal{F}_{L^2(\mathbb{R}^m)}: & L^2(\mathbb{R}^m) & \longrightarrow & L^2(\mathbb{R}^m)\\ & f & \longmapsto & \widehat{f}=\underbrace{\lim_{r\to+\infty}}_{\text{dans }L^2(\mathbb{R}^m)}\Big(\xi\mapsto\int_{\|x\|\le r}f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\cdot x}\,\mathrm{d}x\Big)\end{array}$$

dont la réciproque est

$$\begin{array}{rccl}(2\pi)^{-m}\,\overline{\mathcal{F}}_{L^2(\mathbb{R}^m)}: & L^2(\mathbb{R}^m) & \longrightarrow & L^2(\mathbb{R}^m)\\ & f & \longmapsto & \underbrace{\lim_{r\to+\infty}}_{\text{dans }L^2(\mathbb{R}^m)}\Big(x\mapsto(2\pi)^{-m}\int_{\|\xi\|\le r}f(\xi)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\xi}\,\mathrm{d}\xi\Big)\end{array}$$

Elle vérifie : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^m}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x=(2\pi)^{-m}\int_{\mathbb{R}^m}\big|\widehat{f}(\xi)\big|^2\,\mathrm{d}\xi$ quand $f\in L^2(\mathbb{R}^m)$.

Remarque

On pose $\check{f}(x)=f(-x)$ et $\tau_af(x)=f(x-a)$ pour $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{C}$, $a\in\mathbb{R}^m$ et tout $x\in\mathbb{R}^m$.

(a) Les applications $f\to\check{f}$ et $f\to\tau_a(f)$ passent aux quotients modulo l'égalité presque partout.

(b) Soit $p\in\{1,2\}$. Pour tout $f\in L^p(\mathbb{R}^m)$, on a :
$\mathcal{F}\check{f}=(\mathcal{F}f)\check{}=\overline{\mathcal{F}}f$, $\widehat{\tau_af}(\xi)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi a}\widehat{f}(\xi)$ et $(\tau_a\widehat{f})(\xi)=\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}xa}f\big)\widehat{}(\xi)$ pour tout $\xi\in\mathbb{R}^m$.

En particulier $\widehat{f}$ est paire (respectivement impaire) lorsque f est paire (respectivement impaire).

Proposition

On a : $\boxed{\widehat{f*g}=\widehat{f}\,\widehat{g}}$ quand $f,g\in L^1(\mathbb{R}^m)$.

On retrouve le fait que le produit de convolution $*$ sur $L^1(\mathbb{R}^m)$ est commutatif et associatif.

Proposition

Pour tout $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_m)\in\mathbb{N}^m$, on note :
$|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_m$, $x^\alpha=x_1^{\alpha_1}\dots x_m^{\alpha_m}$, et $D^\alpha=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_m^{\alpha_m}}$.

(a) Si $f\in\mathscr{C}^k(\mathbb{R}^m)$, et $D^\alpha f\in\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^m)$ quand $|\alpha|\le k$, on a :
$(D^\alpha f)\widehat{}(\xi)=\mathrm{i}^{|\alpha|}\,\xi^\alpha\,\widehat{f}(\xi)$ pour $|\alpha|\le k$ et $\xi\in\mathbb{R}^m$, donc $\widehat{f}(\xi)\underset{\|\xi\|\to+\infty}{=}o\big(\frac{1}{\|\xi\|^k}\big)^{(*)}$.

[Utiliser ce qui suit : si $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ et $f'\in\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$, alors $f(x)=\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t+f(0)$ a des limites quand $x\to-\infty$ et quand $x\to+\infty$.]

En particulier : si $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ avec $f\in\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ et $f'\in\mathscr{L}^1(\mathbb{R})\cap\mathscr{L}^2(\mathbb{R})$, alors $f=\frac{1}{2\pi}\overline{\mathcal{F}}\widehat{f}$.

(b) Si $x^\alpha f\in\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^m)$ quand $|\alpha|\le k^{(**)}$, on a :
$\widehat{f}\in\mathscr{C}^k(\mathbb{R}^m)$ et $D^\alpha\widehat{f}(\xi)=\big((-\mathrm{i})^{|\alpha|}\,x^\alpha f\big)\widehat{}(\xi)$ pour $|\alpha|\le k$ et $\xi\in\mathbb{R}^m$.

$(*)$ Comme $\widehat{f}$ est par ailleurs continue, on a donc : $\sup_{\xi\in\mathbb{R}^m}\big|(1+\|\xi\|^2)^{\frac{k}{2}}\widehat{f}(\xi)\big|<+\infty$.

$(**)$ Cette hypothèse signifie que $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{C}$ est mesurable et $\int_{\mathbb{R}^m}\big|(1+\|x\|^2)^{\frac{k}{2}}f(x)\big|\,\mathrm{d}x<+\infty$.

Exemple

On a : $\mathcal{F}\left(x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\|x\|^2}\right) = (2\pi)^{\frac{m}{2}}\left(\xi \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\|\xi\|^2}\right)$.

En effet la fonction $f\colon x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$ vérifie $(\star)$ $y' = -xy$, donc en appliquant la transformation de Fourier à chaque membre de $(\star)$, la fonction $\widehat{f}$ vérifie aussi $(\star)$ et a fortiori est multiple de f. On conclut en utilisant : $\widehat{f}(0) \overset{\text{Fubini}}{=} \left(\iint_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}} \overset{\text{polaires}}{=} \left(\int_0^{+\infty} 2\pi\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}r^2}\,r\,\mathrm{d}r\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2\pi}$.

Définition

On considère un espace vectoriel topologique E sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On dit que E est un *espace de Fréchet* si sa topologie est métrisable et définie par une famille de semi-normes, et toute suite $(x_n)_{n\geq 0}$ dans E telle que $x_q - x_p \xrightarrow[p\leq q,\, p\to+\infty]{} 0$ est convergente.

Définition-Proposition

(a) On note $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m) = \left\{ f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^m) \;\middle|\; \forall\alpha \in \mathbb{N}^m \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \left\|(1+\|x\|^2)^N D^\alpha f\right\|_\infty < +\infty \right\}$.

Par conséquent, on a : $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m) \subseteq L^p(\mathbb{R}^m)$ lorsque $1 \leq p \leq +\infty$.

L'espace vectoriel $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$ muni des semi-normes $f \mapsto \left\|(1+\|x\|^2)^N D^\alpha f\right\|_\infty$ avec $\alpha \in \mathbb{N}^m$ et $N \in \mathbb{N}$ est un espace de Fréchet, appelé « espace de Schwartz ».

(b) L'application linéaire $\begin{array}{ccc} \mathscr{S}(\mathbb{R}^m) & \to & \mathscr{S}(\mathbb{R}^m) \\ f & \mapsto & \widehat{f} \end{array}$ est un homéomorphisme.

(c) L'application bilinéaire $\begin{array}{ccc} \mathscr{S}(\mathbb{R}^m) \times \mathscr{S}(\mathbb{R}^m) & \to & \mathscr{S}(\mathbb{R}^m) \\ (f,g) & \mapsto & fg \end{array}$ est définie et continue.

Il en résulte que $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$ est stable par convolution.

complément

Proposition

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et intégrable.

On suppose que $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, ou plus généralement que :

(i) les séries $\left(\sum f(x+2\pi n)\right)_{n\geq 0}$ et $\left(\sum f(x-2\pi n)\right)_{n\geq 0}$ $\underbrace{\text{convergent uniformément sur tout segment}}_{\text{par exemple } \sup_{x\in\mathbb{R}} |(x^2+1)f(x)| < +\infty}$;

(ii) $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{f}(n)\right| < +\infty$.

Alors : $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n) = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(2\pi n)$ « formule sommatoire de Poisson ».

[Avec $\tau_{-x}f$ à la place de f, on trouve : $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \underbrace{\widehat{f}(n)}_{} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+2\pi n)$ pour $x \in \mathbb{R}$ (résultat aussi issu de la démonstration).]

n^{e} coefficient de Fourier de la fonction périodique de x qui apparaît à droite