# Complément : phénomène de Gibbs

On considère la fonction 1-périodique $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ déterminée par :

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in \left]-\frac{1}{2}, 0\right] \\ 1 & \text{si } x \in \left]0, \frac{1}{2}\right] \end{cases} .$$

La suite $(S_n(f))_{n\geq 0}$ des sommes partielles de la série de Fourier de $f$ vérifie :

$$(S_{2n-1}(f))(x) = (S_{2n}(f))(x) = \sum_{k=-(2n-1)}^{2n-1} \widehat{f}(k)\, \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi k x} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin((2k-1)2\pi x)}{2k-1} \quad \text{pour } n \geq 1 \text{ et } x \in \mathbb{R}.$$

D'après le théorème de Dirichlet, on a :

$$(S_{2n-1}(f))(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x) \quad \text{pour tout } \ x \in \mathbb{R} \setminus \tfrac{1}{2}\mathbb{Z}.$$

Mais la suite $(S_n(f))_{n\geq 0}$ ne converge pas uniformément, puisque :

$$S_{2n-1}(f)\left(\tfrac{1}{4n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2\int_0^1 \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}\,\mathrm{d}t \ \in\ [1{,}17; 1{,}18] \ \text{ avec } \|f\|_\infty = 1.$$

Cela apparaît ci-dessous sur les tracés des graphes des applications $S_{2n-1}(f)$.