Espaces de Hilbert : à retenir (J-Y D)

On se place sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition

On se donne un espace vectoriel E.

On appelle *produit scalaire sur* E une application $(x,y) \mapsto \langle x,y\rangle$ de E^2 dans $\mathbb{K}$ telle que
(i) l'application $x \mapsto \langle x,y\rangle$ est linéaire pour tout $y \in E$;
(ii) on a : $\langle y,x\rangle = \overline{\langle x,y\rangle}$ pour tous $x,y \in E$;
(iii) on a : $\langle x,x\rangle \geq 0$ et $(\langle x,x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0)$ pour tout $x \in E \setminus \{0\}$.

Dans ce cas *l'orthogonal* d'une partie A de E est : $A^\perp := \{x \in E \mid \forall a \in A\ \langle x,a\rangle = 0\}$.

Définition-Proposition

(a) On appelle *espace préhilbertien* un espace vectoriel E muni d'un produit scalaire.
Dans ce cas, $x \in E \mapsto \|x\| := \sqrt{\langle x,x\rangle} \in \mathbb{R}^+$ est une norme sur E et pour tous $x,y \in E$, on a :

- $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$ « inégalité de Cauchy-Schwarz » ;
- $|\langle x,y\rangle| = \|x\|\|y\| \iff (x,y)$ liée ;
- $4\langle x,y\rangle = \begin{cases} \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 & \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{R} \\ \text{ou} & \\ \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + \mathrm{i}\|x+\mathrm{i}y\|^2 - \mathrm{i}\|x-\mathrm{i}y\|^2 & \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{C} \end{cases}$ « identité de polarisation ».

(b) On appelle *espace de Hilbert* un espace préhilbertien qui est complet.

Exemples

Soient I un ensemble et $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.
(a) L'espace vectoriel $l^2_{\mathbb{K}}(I)$ muni de $\langle (a_i)_{i\in I}, (b_i)_{i\in I}\rangle := \sum_{i\in I} a_i \overline{b_i}$ est un espace de Hilbert.
(b) L'espace vectoriel $L^2_{\mathbb{K}}(\mu)$ muni de $\langle f,g\rangle := \int_X f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}\mu(x)$ est un espace de Hilbert.

Proposition

Soient E un espace de Hilbert et C un convexe fermé non-vide de E.
(a) Pour tout $x \in E$, il existe un unique $x_0 \in C$ tel que : $d(x,x_0) = d(x,C)$.
On notera $p_C(x) := x_0$ et dira que $p_C(x)$ est *la projection de x sur le convexe C*.
(b) Soit $x \in E$. Le vecteur $p_C(x)$ est l'unique $x_0 \in C$ vérifiant : $\mathrm{Re}\langle \overrightarrow{x_0x}, \overrightarrow{x_0c}\rangle \leq 0$ pour $c \in C$.
(c) L'application $p_C \colon E \to C$ est 1-lipschitzienne.

Proposition

Soient E un espace de Hilbert et F un sous-espace vectoriel fermé de E.
(a) Pour tout $A \subseteq E$, la partie $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de E.
(b) Soit $x \in E$. Le vecteur $p_F(x)$ est l'unique $y \in F$ tel que $x - y \in F^\perp$.
(c) On a : $(F^\perp)^\perp = F$ et $F \oplus F^\perp = E$.
En particulier, pour tout $A \subseteq E$, on a : $\overline{\mathrm{Vect}\, A} = E \iff A^\perp = \{0\}$. $\longleftarrow$[remarquer que $(\overline{\mathrm{Vect}\, A})^\perp = A^\perp$]
(d) Ainsi la projection $p_F : E \to F$ de E sur le convexe F est la restriction de la projection linéaire $\widetilde{p_F} : E \to E$ de E sur F parallèlement au sous-espace vectoriel fermé $F^\perp$ de E.

Théorème (« théorème de représentation de Riesz »)

Soit E un espace de Hilbert.
On note E' l'espace vectoriel normé formé des applications linéaires continues de E dans $\mathbb{K}$.
L'application $\mathbb{R}$-linéaire $\begin{array}{rcl} E & \to & E' \\ y & \mapsto & \langle \cdot\,, y\rangle \end{array}$ est bijective et conserve la norme.

Définition-Proposition

Soit E un espace de Hilbert.

(a) Soient $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de E et $l \in E$. On dit que $(x_n)_{n\geq 0}$ converge faiblement dans E vers l, et note $x_n \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} l$, si pour tout $y \in E$, on a : $\langle x_n, y\rangle \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \langle l, y\rangle$.

(b) Toute suite bornée dans E a une suite extraite qui converge faiblement dans E.

Définition

Soient E un espace vectoriel normé et I un ensemble.

Soient $(a_i)_{i\in I} \in E^I$ et $a \in E$. On note $\mathscr{P}_f(I)$ l'ensemble des parties finies de I.

On dit que la famille $(a_i)_{i\in I}$ est *sommable* de somme a si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists J \in \mathscr{P}_f(I) \quad \forall J' \in \mathscr{P}_f(I) \quad \Big(J' \supseteq J \implies \Big\| \sum_{j'\in J'} a_{j'} - a \Big\| < \varepsilon \Big)$$

Dans ce cas, on note : $\sum_{i\in I} a_i = a$. $\longleftarrow$[en particulier : $\sum_{i\in I} a_i = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ si $I = \mathbb{N}$ et $\sum_{i\in I} a_i = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}$ si $I = \mathbb{Z}$]

Définition

Soient E un espace préhilbertien, et $(e_i)_{i\in I}$ une famille orthonormée dans E.

On dit que la famille orthonormée $(e_i)_{i\in I}$ est une base hilbertienne de E si elle vérifie l'une des trois propriétés équivalentes (i), (ii) et (iii) suivantes :

(i) $\overline{\mathrm{Vect}\{e_i\}_{i\in I}} = E$;

(ii) $\forall x \in E \quad \sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2 = \|x\|^2$ « égalité de Parseval » ; $\longleftarrow$[l'« inégalité de Bessel » $\leq$ est toujours réalisée]

(iii) $\forall x \in E \quad (\langle x, e_i\rangle\, e_i)_{i\in I}$ est sommable et $\sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle\, e_i = x$.

Exemples

(a) L'espace de Hilbert $l^2_{\mathbb{K}}(I)$ admet pour base hilbertienne la famille $(\delta_i)_{i\in I}$ définie par :

$$\delta_i(j) = 0 \quad \text{si } j \neq i \quad \text{et} \quad \delta_i(i) = 1.$$

(b) L'espace de Hilbert $L^2_{\mathbb{C}}([0,1])$ admet pour base hilbertienne la famille $\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi n\cdot}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$.

Théorème

Soit E un espace de Hilbert.

(a) L'espace de Hilbert E possède une base hilbertienne $(e_i)_{i\in I}$.$^{(\star)}$

Dans ce cas $\begin{array}{rcl} E & \to & l^2_{\mathbb{K}}(I) \\ x & \mapsto & (\langle x, e_i\rangle)_{i\in I} \end{array}$ est une bijection de réciproque $\begin{array}{rcl} l^2_{\mathbb{K}}(I) & \to & E \\ (a_i)_{i\in I} & \mapsto & \sum_{i\in I} a_i e_i \end{array}$ avec $\sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2 = \|x\|^2$.

(b) Toutes les bases hilbertiennes de E ont même cardinal.

On appelle *dimension hilbertienne de E* ce cardinal.

Proposition (« procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt »)

Soit E un espace préhilbertien qui a une partie dénombrable dense $\{x_p\}_{p\in\mathbb{N}}$.

Il existe une famille libre $(v_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ de vecteurs de E, avec $\mathbb{N}' = \mathbb{N}\setminus\{0\}$ ou $\mathbb{N}' = \{1, ..., N\}$ pour un certain $N \in \mathbb{N}$, telle que $\mathrm{Vect}(v_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ est dense de E (par exemple extraite de $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$).$^{(\star\star)}$

On construit une base hilbertienne finie ou dénombrable $(e_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ de E ainsi :

$$w_n = v_n - \underbrace{\sum_{1\leq k\leq n-1} \langle v_n, e_k\rangle\, e_k}_{\text{projection orthogonale de } v_n \text{ sur } \mathrm{Vect}(v_1, ..., v_{n-1})} \quad \text{et} \quad e_n = \frac{w_n}{\|w_n\|} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}'.$$

Il s'agit de l'unique suite orthonormée $(e_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ dans E telle que :

$$\mathrm{Vect}(e_1, ..., e_n) = \mathrm{Vect}(v_1, ..., v_n) \quad \text{et} \quad \langle e_n, v_n\rangle \in \mathbb{R}^+ \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}'.$$

$(\star)$ Il existe un espace préhilbertien (sans partie dénombrable dense) qui n'a aucune base hilbertienne. Un contre-exemple se trouve dans Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques*, chapitre V, §2, exercice 2.

$(\star\star)$ Par exemple : $v_n = x_{\alpha(n)}$ où $\alpha(n) = \inf\{p \in \mathbb{N} \mid (v_1, ..., v_{n-1}, x_p) \text{ libre}\}$.