

# Espaces $L^1$ et $L^2$ : à retenir (J-Y D)

On fixe un espace mesuré  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ , un ensemble  $I$ , et  $p \in \{1, 2\}$ .

## Définition-Proposition ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ )

(a) Pour toute  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  mesurable, on note :  $\|f\|_p := \left( \int_X |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \leq +\infty$

(b) On note  $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu) := \{f : X \rightarrow \mathbb{K} \text{ mesurable} \mid \|f\|_p < +\infty\}$  et  $\overline{L_{\mathbb{K}}^p(\mu)} := \overline{\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu) / \mathcal{N}_{\mu}}^{(*)}$

où  $\mathcal{N}_{\mu}$  est le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}^p(\mu)$  formé des fonctions mesurables nulles  $\mu$ -presque partout.

(c) On pose :  $l_{\mathbb{K}}^p(I) = L_{\mathbb{K}}^p(I, \mathcal{P}(I), \text{comptage})$  et  $L_{\mathbb{K}}^p(\mathbb{R}) = L_{\mathbb{K}}^p(\mathbb{R}, \text{Borel}, dx) \xrightarrow{\text{can}} L_{\mathbb{K}}^p(\mathbb{R}, \text{Lebesgue}, dx)$ .

Ainsi :  $l_{\mathbb{K}}^p(I) := \{(a_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I \mid \sum |a_i|^p < +\infty\}$  et  $\|(a_i)_{i \in I}\|_p := \left( \sum_{i \in I} |a_i|^p \right)^{1/p}$ .

(d) On a :  $l_{\mathbb{C}}^1(I) \subseteq l_{\mathbb{C}}^2(I)$ , et,  $L_{\mathbb{C}}^2(\mu) \subseteq L_{\mathbb{C}}^1(\mu)$  lorsque  $\mu(X) < +\infty$ .

## Proposition

Soient  $f, g : X \rightarrow \mathbb{C}$  deux applications mesurables.

(a) On a :  $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \leq +\infty$  « inégalité de Minkowski ».

(b) On a :  $\|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_2 \leq +\infty$  « inégalité de Hölder ».

## Proposition

(a) On a :  $\text{Vect}(\mathbb{1}_A)_{A \in \mathcal{A} \text{ et } \mu(A) < +\infty}$  est dense dans  $L_{\mathbb{C}}^p(\mu)$ .

(c) Pour tout intervalle ouvert  $J$ , on a :  $\text{Vect}(\mathbb{1}_{[a,b]})_{a,b \in J}$  et  $\mathcal{C}_c(J)$  sont denses dans  $L_{\mathbb{C}}^p(J)$ ,

où  $\mathcal{C}_c(J)$  désigne l'ensemble des  $f \in \mathcal{C}(J)$  tels que  $\text{Supp } f := \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}^{(**)}$  est compact.

## Théorème (« théorème de Riesz-Fischer »)

(a) L'espace vectoriel  $L_{\mathbb{C}}^p(\mu)$  muni de  $f \mapsto \|f\|_p$  est un espace de Banach.

(b) Si  $(f_n)_{n \geq 0}$  converge vers  $f$  dans  $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^p(\mu)$ , alors  $(f_n)_{n \geq 0}$  a une suite extraite  $(f_{n_k})_{k \geq 0}$  qui converge simplement presque partout vers  $f$ .

## Définition-Proposition

Soient  $E$  un espace vectoriel normé sur  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  et  $I$  un ensemble.

Soient  $(a_i)_{i \in I} \in E^I$  et  $a \in E$ . On note  $\mathcal{P}_f(I)$  l'ensemble des parties finies de  $I$ .

(a) On dit que la famille  $(a_i)_{i \in I}$  est *sommable* de somme  $a$  si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists J \in \mathcal{P}_f(I) \quad \forall J' \in \mathcal{P}_f(I) \quad \left( J' \supseteq J \implies \left\| \sum_{j' \in J'} a_{j'} - a \right\| < \varepsilon \right)$$

Dans ce cas, on note :  $\sum_{i \in I} a_i = a$ .

(b) On suppose ici que  $E$  est complet. La famille  $(a_i)_{i \in I}$  est sommable si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists J \in \mathcal{P}_f(I) \quad \forall K \in \mathcal{P}_f(I \setminus J) \quad \left\| \sum_{k \in K} a_k \right\| < \varepsilon \quad (\text{« critère de Cauchy »}).$$

En particulier, si la famille  $(\|a_i\|)_{i \in I}$  est sommable dans  $\mathbb{R}$ , alors  $(a_i)_{i \in I}$  est sommable dans  $E$ .

(c) On suppose ici que  $E = \mathbb{C}$  et note  $m$  la mesure de comptage sur  $(I, \mathcal{P}(I))$ .

On a :  $(a_i)_{i \in I} \in l_{\mathbb{C}}^1(I)$  si et seulement si  $(a_i)_{i \in I}$  est sommable ; dans ce cas :  $\sum_{i \in I} a_i = \int_I a_i dm(i)$ .

Si  $I = \mathbb{N}$  :  $\int_{\mathbb{N}} a_n dm(n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  quand  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$  ou  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{N})$ .

Si  $I = \mathbb{Z}$  :  $\int_{\mathbb{Z}} a_n dm(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}$  quand  $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{Z}}$  ou  $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in l_{\mathbb{C}}^1(\mathbb{Z})$ .

(\*) Soient  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ .

On pose  $\dot{x} := \{x + y \mid y \in F\}$  quand  $x \in E$ , puis  $E/F := \{\dot{x} \mid x \in E\}$ .

L'ensemble  $E/F$  muni des « lois » portant sur  $u, v \in E/F$  et  $\alpha \in \mathbb{K}$  déterminées par les égalités

(i)  $u + v := \widehat{x + y}$  indépendamment du choix d'éléments  $x, y$  de  $E$  tels que  $u = \dot{x}$  et  $v = \dot{y}$

(ii)  $\alpha \times u := \widehat{\alpha x}$  indépendamment du choix d'un élément  $x$  de  $E$  tel que  $u = \dot{x}$

est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, appelé  *$\mathbb{K}$ -espace vectoriel quotient de  $E$  par  $F$* .

(\*\*) Pour tout  $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}^{1loc}(\mathbb{R})$  on note  $\text{Supp } f$  le plus petit fermé de  $\mathbb{R}$  en dehors duquel  $f$  s'annule presque partout.

# Espaces de Hilbert : à retenir (J-Y D)

## Définition-Proposition

On se donne un espace vectoriel  $E$  sur  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

- (a) On appelle *produit scalaire sur  $E$*  une application  $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$  de  $E^2$  dans  $\mathbb{K}$  telle que
- (i) l'application  $x \mapsto \langle x, y \rangle$  est linéaire pour tout  $y \in E$ ;
  - (ii) on a :  $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$  pour tous  $x, y \in E$ ; ← [dans ce cas :  $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}$  pour tout  $x \in E$ ]
  - (iii) on a :  $\langle x, x \rangle \geq 0$  et  $(\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0)$  pour tout  $x \in E \setminus \{0\}$ .

Dans ce cas l'*orthogonal* d'une partie  $A$  de  $E$  est :  $A^\perp := \{x \in E \mid \forall a \in A \langle x, a \rangle = 0\}$ .

(b) On appelle *espace préhilbertien* un espace vectoriel  $E$  muni d'un produit scalaire.

Dans ce cas,  $x \in E \mapsto \|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} \in \mathbb{R}^+$  est une norme sur  $E$ , et pour tous  $x, y \in E$ , on a :  $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$  « inégalité de Cauchy-Schwarz » et  $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\| \iff (x, y)$  liée.

(b) On appelle *espace de Hilbert* un espace préhilbertien qui est complet.

**Exemples** ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ,  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  est un espace mesuré et  $I$  est un ensemble)

- (a) L'espace vectoriel normé  $L^2_{\mathbb{K}}(\mu)$  est un espace de Hilbert pour  $\langle f, g \rangle := \int_X f(x) \overline{g(x)} d\mu(x)$ .
- (b) L'espace vectoriel normé  $l^2_{\mathbb{K}}(I)$  est un espace de Hilbert pour  $\langle (a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I} \rangle := \sum_{i \in I} a_i \overline{b_i}$ .

## Proposition

Soient  $E$  un espace de Hilbert sur  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  et  $F$  un sous-espace vectoriel fermé de  $E$ .<sup>(\*)</sup>

(a) Pour tout  $A \subseteq E$ , la partie  $A^\perp$  est un sous-espace vectoriel fermé de  $E$ .

(b) On a :  $(F^\perp)^\perp = F$  et  $F \oplus F^\perp = E$ .

En particulier, pour tout  $A \subseteq E$ , on a :  $\overline{\text{Vect } A} = E \iff A^\perp = \{0\}$ . ← [remarquer que  $(\overline{\text{Vect } A})^\perp = A^\perp$ ]

## Théorème (« théorème de représentation de Riesz »)

Soit  $E$  un espace de Hilbert sur  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

On note  $E'$  l'espace vectoriel normé formé des applications linéaires continues de  $E$  dans  $\mathbb{K}$ .

L'application  $y \in E \mapsto \langle \cdot, y \rangle \in E'$  est bijective et conserve la norme.

## Définition

Soient  $E$  un espace préhilbertien sur  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , et  $(e_i)_{i \in I}$  une famille orthonormée dans  $E$ .

On dit que la famille orthonormée  $(e_i)_{i \in I}$  est une *base hilbertienne* de  $E$  si elle vérifie l'une des trois propriétés équivalentes (i), (ii) et (iii) suivantes :

- (i)  $\overline{\text{Vect}\{e_i\}_{i \in I}} = E$ ;
- (ii)  $\forall x \in E \quad \sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2 = \|x\|^2$ ; ← [l'inégalité  $\leq$  est toujours réalisée]
- (iii)  $\forall x \in E \quad (\langle x, e_i \rangle e_i)_{i \in I}$  sommable et  $\sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i = x$ .

## Proposition (« procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt »)

Soit  $E$  un espace préhilbertien sur  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  qui a une partie dénombrable dense  $\{x_p\}_{p \in \mathbb{N}}$ .

Il existe une famille libre  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}'}$  de vecteurs de  $E$ , avec  $\mathbb{N}' = \mathbb{N} \setminus \{0\}$  ou  $\mathbb{N}' = \{1, \dots, N\}$  pour un certain  $N \in \mathbb{N}$ , telle que  $\text{Vect}(v_n)_{n \in \mathbb{N}'}$  est dense de  $E$  (par exemple extraite de  $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$ ).<sup>(\*\*)</sup>

On construit une base hilbertienne finie ou dénombrable  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}'}$  de  $E$  ainsi :

$$w_n = v_n - \underbrace{\sum_{1 \leq k \leq n-1} \langle v_n, e_k \rangle e_k}_{\text{projection orthogonale de } v_n \text{ sur } \text{Vect}(v_1, \dots, v_{n-1})} \quad \text{et} \quad e_n = \frac{w_n}{\|w_n\|} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}'.$$

Il s'agit de l'unique suite orthonormée  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}'}$  dans  $E$  telle que :

$$\text{Vect}(e_1, \dots, e_n) = \text{Vect}(v_1, \dots, v_n) \quad \text{et} \quad \langle e_n, v_n \rangle \in \mathbb{R}^+ \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}'.$$

(\*) L'hypothèse «  $E$  est un espace préhilbertien et  $F$  est un sous-espace vectoriel complet de  $E$  » suffit.

(\*\*) Par exemple :  $v_n = x_{\alpha(n)}$  où  $\alpha(n) = \inf\{p \in \mathbb{N} \mid (v_1, \dots, v_{n-1}, x_p) \text{ libre}\}$ .