

Limites inférieure et supérieure : mise au point (J-Y D)

On note $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, où $-\infty, +\infty$ sont deux nouveaux éléments non-réels distincts. La définition qui suit sert à montrer qu'il existe une topologie sur $\overline{\mathbb{R}}$ (la « topologie de l'ordre ») pour laquelle les voisinages d'un réel x_0 sont les parties contenant $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ pour un certain $\varepsilon > 0$, les voisinages de $-\infty$ sont les parties contenant $[-\infty, b[$ pour un certain $b \in \mathbb{R}$, et les voisinages de $+\infty$ sont les parties contenant $]a, +\infty]$ pour un certain $a \in \mathbb{R}$.

Définition

On définit : $\forall x, y \in \overline{\mathbb{R}} \quad x \leq y \iff (x = -\infty \text{ ou } (x, y \in \mathbb{R} \text{ et } x \leq y) \text{ ou } y = +\infty)$.
On sait que toute partie non-vide de $\overline{\mathbb{R}}$ a pour \leq une borne inférieure et une borne supérieure.

(a) On appelle *intervalle ouvert* de $\overline{\mathbb{R}}$ une partie de $\overline{\mathbb{R}}$ de l'une des formes suivantes : $\emptyset, \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a < x < b\}$ avec $a, b \in \overline{\mathbb{R}}, \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid x > a\}$ avec $a \in \overline{\mathbb{R}}, \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid x < b\}$ avec $b \in \overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathbb{R}}$.

(b) Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. On appelle *voisinage* de x_0 dans $\overline{\mathbb{R}}$ une partie V de $\overline{\mathbb{R}}$ contenant un intervalle ouvert qui contient x_0 . On notera $\mathcal{V}(x_0)$ l'ensemble des voisinages de x_0 dans $\overline{\mathbb{R}}$.

(c) On appelle *ouvert* de $\overline{\mathbb{R}}$ toute partie de $\overline{\mathbb{R}}$ qui contient un voisinage de chacun de ses points. On appelle *fermé* de $\overline{\mathbb{R}}$ toute partie de $\overline{\mathbb{R}}$ dont le complémentaire est un ouvert de $\overline{\mathbb{R}}$.

Remarque

Les applications $f: \overline{\mathbb{R}} \rightarrow [-1, 1]$ et $g: [-1, 1] \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, définies par passage à la limite aux

$$x \mapsto \frac{x}{1+|x|} \qquad y \mapsto \frac{y}{1-|y|}$$

bornes de leur ensemble de définition, sont bijectives et réciproques l'une de l'autre.

Une étude de limites immédiate montre que f et g sont continues.

Les ouverts de $\overline{\mathbb{R}}$ sont donc, par exemple, les ouverts pour la distance d suivante :

$$d(a, b) := \left| \frac{a}{1+|a|} - \frac{b}{1+|b|} \right| \text{ pour tous } a, b \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Définition

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$.

(a) Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que a est la limite de $(u_n)_{n \geq 0}$ quand $n \rightarrow +\infty$ si :
pour tout $V \in \mathcal{V}(a)$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on a $u_n \in V$.

(b) On appelle *limite inférieure* de $(u_n)_{n \geq 0}$ la limite de la suite croissante $(\inf_{k \geq n} u_k)_{n \geq 0}$.^(*)
On la note : $\liminf_{n \rightarrow +\infty} u_n := \varliminf_{n \rightarrow +\infty} u_n := \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf_{k \geq n} u_k \in \overline{\mathbb{R}}$.

(c) On appelle *limite supérieure* de $(u_n)_{n \geq 0}$ la limite de la suite décroissante $(\sup_{k \geq n} u_k)_{n \geq 0}$.^(*)
On la note : $\limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n := \varlimsup_{n \rightarrow +\infty} u_n := \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{k \geq n} u_k \in \overline{\mathbb{R}}$.

Définition-Proposition

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ (resp. \mathbb{C}).

(a) Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ (resp. $a \in \mathbb{C}$). On dit que a est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n \geq 0}$ si :
pour tout $V \in \mathcal{V}(a)$, pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq N$ tel que $u_n \in V$.

(b) L'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n \geq 0}$ est un fermé de $\overline{\mathbb{R}}$ (resp. \mathbb{C}).

DÉMONSTRATION DE (b)

On rappelle que l'intérieur d'une partie A d'un espace topologique X est formé des points de A dont un voisinage est inclus dans A . Par passage au complémentaire, sachant que $\overset{\circ}{\mathbb{C}}_X A = \mathbb{C}_X \overset{\circ}{A}$, l'adhérence d'une partie B de X est formé des points de X dont tout voisinage coupe B .

Ainsi, en échangeant dans (a) les termes « pour tout $V \in \mathcal{V}(a)$ » et « pour tout $N \in \mathbb{N}$ », on constate que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n \geq 0}$ est égal à : $\bigcap_{N \geq 0} \overline{\{u_n ; n \geq N\}}$. \square

(*) L'existence de la limite est classique. Elle est expliquée dans la démonstration de la dernière proposition.

Définition-Proposition

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ (resp. \mathbb{C}).

(a) On appelle *suite extraite* de $(u_n)_{n \geq 0}$ toute suite de la forme $(u_{n_k})_{k \geq 0}$ où $(n_k)_{k \geq 0}$ est une suite strictement croissante dans \mathbb{N} .

(b) Les valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n \geq 0}$ sont les limites des suites convergentes dans $\overline{\mathbb{R}}$ (resp. \mathbb{C}) extraites de $(u_n)_{n \geq 0}$.

DÉMONSTRATION DE (b)

On fixe une distance d définissant la topologie de $\overline{\mathbb{R}}$ (resp. \mathbb{C}). Par exemple la distance d de la page précédente (resp. la distance usuelle sur \mathbb{C}).

(\subseteq) Soit a une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n \geq 0}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ (resp. \mathbb{C}).

On construit par récurrence une suite $(n_k)_{k \geq 0}$ dans \mathbb{N} . On pose $n_0 = 0$. On suppose n_k connu ($k \geq 0$) et pose $N = n_k + 1$. On note n_{k+1} le plus petit entier $n \geq N$ tel que $u_n \in B(a, \frac{1}{k+1})$.

La suite $(n_k)_{k \geq 0}$ est strictement croissante et vérifie $d(u_{n_k}, a) \leq \frac{1}{k}$ pour $k \geq 1$ donc $u_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} a$.

(\supseteq) On suppose que a est la limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ (resp. \mathbb{C}) d'une suite $(u_{n_k})_{k \geq 0}$ extraite de $(u_n)_{n \geq 0}$. Soient $V \in \mathcal{V}(a)$ et $N \in \mathbb{N}$. Il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_k} \in V$ dès que $k \geq K$.

Quand $k \geq 0$, on a $n_{k+1} - n_k > 0$ puis $n_{k+1} - n_k \geq 1$. D'où, par récurrence : $n_k \geq k$ quand $k \geq 0$. On pose : $k_0 = \max(K, N)$ et $n = n_{k_0}$. On a : $u_n \in V$ car $k_0 \geq K$, et, $n \geq k_0 \geq N$.

Ainsi a est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n \geq 0}$. □

Corollaire

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$.

La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si $\liminf_{n \rightarrow +\infty} u_n = \limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Dans ce cas : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \liminf_{n \rightarrow +\infty} u_n = \limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

DÉMONSTRATION

Soit $l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Lorsque $\liminf_{n \rightarrow +\infty} u_n = \limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$, on a : $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$ car $\inf_{k \geq n} u_k \leq u_n \leq \sup_{k \geq n} u_k$ pour $n \geq 0$.

Lorsque $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$, la définition-proposition précédente montre que toutes les valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n \geq 0}$, en particulier $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ et $\liminf_{n \rightarrow +\infty} u_n$, sont égales à l . □

Proposition

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$.

(a) La limite inférieure de $(u_n)_{n \geq 0}$ est la plus petite valeur d'adhérence de $(u_n)_{n \geq 0}$.^(*)

(b) La limite supérieure de $(u_n)_{n \geq 0}$ est la plus grande valeur d'adhérence de $(u_n)_{n \geq 0}$.

DÉMONSTRATION DE (a) (même idée pour (b))

On pose : $a_n := \inf_{k \geq n} u_k$ pour $n \geq 0$.

On vérifie que $(a_n)_{n \geq 0}$ tend vers la plus petite valeur d'adhérence de $(u_n)_{n \geq 0}$.

• La suite $(a_n)_{n \geq 0}$ croît car $\{u_k ; k \geq n+1\} \subseteq \{u_k ; k \geq n\}$. On note : $L := \sup\{a_n ; n \geq 0\}$.

Pour tout intervalle ouvert V de $\overline{\mathbb{R}}$ contenant L , il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $a_{n_0} \in V$; ensuite, pour tout $n \geq n_0$, on a : $a_{n_0} \leq a_n \leq L$ donc $a_n \in V$. Il en résulte que : $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} L$.

• Pour chaque $N \geq 0$, les termes de la suite $(a_n)_{n \geq N}$ sont dans $\overline{\{u_k ; k \geq N\}}$, donc L aussi. Ainsi $L \in \bigcap_{N \geq 0} \overline{\{u_k ; k \geq N\}}$, ce qui signifie que L est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n \geq 0}$.

• Soit a une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n \geq 0}$. D'après la définition-proposition précédente, a est limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ d'une suite $(u_{n_k})_{k \geq 0}$ extraite de $(u_n)_{n \geq 0}$.

On a : $a_{n_k} \leq u_{n_k}$ pour tout $k \geq 0$. D'où : $L \leq a$ en passant à la limite. □

(*) Étant donné une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ et une suite $(v_n)_{n \geq 0}$ dans \mathbb{R} convergente vers $\ell \in \mathbb{R}$, on a donc :

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = \min_{(u_{n_k} + v_{n_k})_{k \geq 0} \text{ converge dans } \overline{\mathbb{R}}} \lim_{k \rightarrow +\infty} (u_{n_k} + v_{n_k}) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} u_n + \ell.$$