

Formule des résidus : à retenir (J-Y D)

Définition-Proposition

Soient Ω un ouvert de \mathbb{C} et f une application de Ω dans \mathbb{C} .

On dit que f est *holomorphe* si elle vérifie l'une des trois propriétés équivalentes suivantes :

- (i) pour tout $z_0 \in \Omega$, le quotient $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ a une limite (notée $f'(z_0)$) quand $z \rightarrow z_0$ avec $z \neq z_0$;
- (ii) pour tout $z_0 \in \Omega$, f est différentiable en z_0 et $df(z_0)$ est \mathbb{C} -linéaire ;

[En posant $f(z) = P(z) + iQ(z)$ avec $P(z), Q(z) \in \mathbb{R}$, cela s'écrit : f est différentiable sur Ω avec $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$ et $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$.]

- (iii) pour tout $z_0 \in \Omega$, il existe $R > 0$ avec $B(z_0, R) \subseteq \Omega$ et une suite $(a_n)_{n \geq 0}$ de nombres complexes, tels qu'on ait : $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ pour tout $z \in B(z_0, R)$.

Dans ce cas, f est indéfiniment \mathbb{C} -dérivable au sens du (i), la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ s'écrit $\left(\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\right)_{n \geq 0}$, et l'égalité du (iii) est valable dans toute boule ouverte $B(z_0, R)$ de centre z_0 incluse dans Ω .

[En outre, toute application somme, ou produit, ou quotient, ou composée, de deux fonctions holomorphes est holomorphe (sous réserve d'être définie). Les formules usuelles pour les dérivées, ici au sens du (i), restent valables.]

Définition-Proposition

Soient Ω un ouvert de \mathbb{C} et f une fonction holomorphe sur Ω .

- (a) Pour toute « couronne » $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z - z_0| < r_2\}$ incluse dans Ω , il existe une unique famille $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ d'éléments de \mathbb{C} telle que :

$$\forall z \in \mathcal{C} \quad f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n \quad \text{« développement en série de Laurent de } f \text{ en } z_0 \text{ ».}$$

[Si $r_1 < r < r_2$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a : $a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}(z_0, r)} \frac{f(u)}{(u-z)^{n+1}} du$. Les a_n , $n \in \mathbb{Z}$, sont donc indépendants des choix de r_1 et r_2 .]

- (b) On considère une boule ouverte épointée $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < r\}$ incluse dans Ω . Le *résidu de f en z_0* , noté $\text{Res}(f, z_0)$ ou $\text{Res}(f(z), z = z_0)$, est le coefficient a_{-1} du développement en série de Laurent de f en z_0 .

- (c) On dit qu'un point z_0 de Ω est un *pôle de multiplicité k* de f s'il existe $r > 0$ tel que $B(z_0, r) \setminus \{z_0\} \subseteq \Omega$ et l'ensemble des $n > 0$ tels que $a_{-n} \neq 0$ est non vide de plus grand élément k .

associé à la couronne $B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$

- d) Soient $g, h: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphes et $z_0 \in \Omega$ tels que $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$ et $h'(z_0) \neq 0$.

Alors $\frac{g}{h}$ est holomorphe sur $\{h \neq 0\}$, z_0 est pôle de multiplicité 1 de $\frac{g}{h}$, et $\boxed{\text{Res}\left(\frac{g}{h}, z_0\right) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}}$.

« pôle simple »

Définition-Proposition

Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} .

- (a) Une *fonction méromorphe* sur Ω est une application holomorphe sur un ouvert de la forme $\Omega \setminus P$ où P est un fermé discret de Ω formé de pôles de f .

[Une partie D de Ω est dite « discrète » si tout point de D est centre d'une boule ouverte qui ne contient pas d'autre élément de D .]

- (b) Soit Ω un ouvert connexe non vide de \mathbb{C} . L'ensemble des fonctions méromorphes sur Ω est un corps, en prolongeant par continuité (en particulier, il est stable par quotient).

Théorème

On considère un lacet γ homotope à un point dans un ouvert Ω de \mathbb{C} (par exemple un lacet γ quelconque dans un ouvert étoilé Ω de \mathbb{C}) et une fonction f holomorphe sur $\Omega \setminus S$ où S est un fermé discret dans Ω qui ne coupe pas l'image de γ (par exemple une fonction f méromorphe sur Ω sans pôle dans l'image de γ avec S égal à l'ensemble de ses pôles).

[Un lacet est une application continue $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ avec $\gamma(a) = \gamma(b)$. Il est dit *homotope à un point* dans Ω s'il existe une application continue $c : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow \Omega$ avec $c(s, a) = c(s, b)$ pour tout $s \in [0, 1]$, telle que $c(0, \cdot) = \gamma$ et $c(1, \cdot)$ est constante.]

On a :
$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2i\pi \sum_{z_0 \in S} \underbrace{\text{Ind}(\gamma, z_0)}_{\text{nombre fini de termes non nuls}} \text{Res}(f, z_0) \quad \ll \text{formule des résidus} \gg.$$

[Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. L'indice $\text{Ind}(\gamma, z_0)$ par rapport à z_0 d'un lacet γ dans $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ est par définition le nombre $\frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi} \in \mathbb{Z}$, obtenu indépendamment du choix d'une application continue $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\frac{\gamma(t) - z_0}{|\gamma(t) - z_0|} = e^{i\theta(t)}$ pour $t \in [a, b]$ (une telle θ existe). Concrètement, et on s'en tiendra à cette interprétation dans les calculs d'intégrales par la formule des résidus, l'indice de γ par rapport à z_0 correspond au nombre de tours dans le sens direct autour de z_0 qu'on décrit en parcourant γ dans le sens positif.]

Choix des lacets pour les calculs d'intégrales par la formule des résidus (R rationnelle)

Intégrale	Hypothèse sur R	$f(z)$	γ
$\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$	$R(\cos \theta, \sin \theta)$ définis	$\frac{1}{iz} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)$	
$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx$	R sans pôle réel $\deg R \leq -2$	$R(z)$	
$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) e^{ix} dx$ (converge en $\pm\infty$ par IPP)	R sans pôle réel $\deg R \leq -1$	$R(z) e^{iz}$	
$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} R(x) e^{ix} dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} R(x) e^{ix} dx \right)$ (converge en $\pm\infty$ par IPP)	R sans pôle dans $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ 0 pôle simple de R $\deg R \leq -1$	$R(z) e^{iz}$	
$\int_0^{+\infty} R(x) x^\alpha dx$ (resp. $\int_0^{+\infty} R(x) x^\alpha \ln x dx$) avec $0 < \alpha < 1$	R sans pôle dans $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ 0 non-pôle multiple de R $\deg R \leq -2$	$R(z) e^{\alpha \text{Log } z}$ (resp. $R(z) e^{\alpha \text{Log } z} \text{Log } z$)	
$\int_0^{+\infty} R(x) \ln x dx$ [ou IPP si R a une primitive évidente]	R sans pôle dans \mathbb{R}^+ $\deg R \leq -2$	$R(z) \text{Log } z (\text{Log } z - 2i\pi)$ [ou $R(z)(\text{Log } z)^2$ si est R réelle]	