

ÉQUATION DES CORDES VIBRANTES

On se propose d'étudier l'équation des cordes vibrantes :

$$(\star) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x, t) = \omega^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) \quad \text{et} \quad f(0, t) = f(\frac{1}{2}, t) = 0 \quad \text{où} \quad \omega > 0$$

associée au faibles mouvements d'une corde tendue fixée en ses extrémités d'abscisses 0 et $\frac{1}{2}$, où $f(x, t)$ désigne la hauteur du point de la corde d'abscisse x à l'instant t . (*)

- 1) On suppose que $f: [0, \frac{1}{2}] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^2 (au sens où elle est restriction d'une application \tilde{f} de classe C^2 , d'un ouvert U de \mathbb{R}^2 contenant $[0, \frac{1}{2}] \times \mathbb{R}$, dans \mathbb{R}) et vérifie (\star) .

On considère l'application $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ déterminée par :

- (i) $g(x, t) = f(x, t)$ pour $x \in [0, \frac{1}{2}]$ et $t \in \mathbb{R}$;
- (ii) $g(-x, t) = -g(x, t)$ pour $x, t \in \mathbb{R}$; ← [définition quand $0 < x < \frac{1}{2}$, découle de (i) et (iii) quand $x \in \mathbb{R}$]
- (iii) $g(x + 1, t) = g(x, t)$ pour $x, t \in \mathbb{R}$.

Démontrer que g est une solution de classe C^2 de (\star) .

- 2) On considère une application $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ qui est impaire en x et 1-périodique en x .

- a) Démontrer qu'il existe des applications $b_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ($n \geq 1$) uniques telles que :

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(t) \sin(2\pi n x) \quad \text{pour} \quad x, t \in \mathbb{R} \quad \text{avec convergence normale en} \quad x \quad \text{à} \quad t \quad \text{fixé.}$$

- b) Démontrer que f vérifie (\star) si et seulement si $b_n'' + 4\omega^2 \pi^2 n^2 b_n = 0$ pour tout $n \geq 1$.

- 3) On se donne $\varphi \in \mathcal{C}^3(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ impaire et $\psi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ impaire.

Démontrer que (\star) a une unique solution f comme dans l'exercice précédent, telle que :

$$f(x, 0) = \varphi(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial t}(x, 0) = \psi(x) \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}. (**)$$

- 4) On lâche la corde sans vitesse initiale ($\psi = 0$).

- a) Démontrer que la solution de la question précédente est donnée par :

$$f(x, t) = \frac{1}{2} (\varphi(x - \omega t) + \varphi(x + \omega t)).$$

- b) On fixe $\epsilon > 0$, et choisit φ impaire et 1-périodique déterminée par :

$$\begin{cases} \varphi(x) = \epsilon \exp\left(\frac{1}{(8x-1)(8x-3)}\right) & \text{pour} \quad \frac{1}{8} < x < \frac{3}{8}; \\ \varphi(x) = 0 & \text{pour} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{8} \quad \text{ou} \quad \frac{3}{8} \leq x \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Représenter graphiquement l'allure de la corde aux temps $\frac{k}{8}$ avec $k \in \{0, 1, \dots, 8\}$ et décrire le mouvement de la corde. On supposera que $\omega = 1$ et ϵ est « petit ».

(*) On note $\vec{T}(s)$ tension exercée par la partie droite de la corde au point d'abscisse curviligne s , placé en $\vec{M}(s)$, et λ la densité de la corde. On applique le principe fondamental de la dynamique à t fixé au morceau de corde d'abscisses curvilignes comprises entre s et $s + h$, en négligeant les effets de la pesanteur :

$$-\vec{T}(s) + \vec{T}(s + h) \underset{h \rightarrow 0}{=} \lambda h \frac{\partial^2 \vec{M}(s)}{\partial t^2} + o(h) \quad \text{donc} \quad \frac{\partial \vec{T}}{\partial s}(s, t) = \lambda \frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial t^2}(s, t).$$

On suppose \vec{T} tangentielle (corde sans raideur) de norme constante, donc $\vec{T}(s) = T_0(\cos \theta(s), \sin \theta(s))$.

Dans le cas de faibles déplacements verticaux : $s = x$, $\vec{M}(s) = (x, f(x))$, $\tan \theta(s) = \frac{\partial f}{\partial x}$, puis $\vec{T}(s) \simeq (T_0, T_0 \frac{\partial f}{\partial x})$.

On en déduit l'équation des cordes vibrantes en choisissant $\omega := \sqrt{\frac{\lambda}{T_0}}$.

(**) Voici une méthode sans série de Fourier. Le changement de variable $(u, v) = (x - \omega t, x + \omega t)$ donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} = -\omega \frac{\partial f}{\partial u} + \omega \frac{\partial f}{\partial v} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \\ \text{puis} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \omega^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial}{\partial t} - \omega \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + \omega \frac{\partial}{\partial x}\right) f = (-2\omega \frac{\partial}{\partial u})(2\omega \frac{\partial}{\partial v}) f = -4\omega^2 \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right). \end{aligned}$$

Ainsi l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \omega^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ d'inconnue $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ équivaut à l'existence de $k \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\frac{\partial f}{\partial v}(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2\omega}) = k(v)$ (ce qui s'écrit $f(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2\omega}) = K(v) + f(\frac{u}{2}, \frac{-u}{2\omega})$ en notant K la primitive de k nulle en 0), c'est-à-dire à l'existence de $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $f(x, t) = f_1(x - \omega t) + f_2(x + \omega t)$.

On en déduit que la solution f de l'exercice 3 s'écrit :

$$\boxed{f(x, t) = \frac{1}{2} (\varphi(x + \omega t) + \varphi(x - \omega t)) + \frac{1}{2\omega} \int_{x-\omega t}^{x+\omega t} \psi(s) ds} \quad \text{« formule de d'Alembert ».}$$