Séries de Fourier : à retenir (J-Y D)

Soient $k \in \mathbb{N}$ et $p \in \{1,2\}$. On note : $\mathbb{T} = \overbrace{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}^{\text{groupe quotient}}$, $\mathscr{C}^k(\mathbb{T}) := \{f \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R}) \mid f \text{ est 1-périodique}\}$ et $\mathscr{L}^p(\mathbb{T}) := \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ mesurable} \mid f \text{ est 1-périodique et } \|f\|_p := (\int_0^1 |f(t)|^p \,\mathrm{d}t)^{1/p} < +\infty\}$.

Rappel 1 (« théorème convergence uniforme + continuité »)

Soient Ω un espace topologique, $f_n\colon \Omega \to \mathbb{C}$ pour $n \in \mathbb{N}$, et $F\colon \Omega \to \mathbb{C}$, et $a \in \Omega$.

On suppose que
- f_n est continue en a pour chaque $n \in \mathbb{N}$;
- $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers F.

Alors F est continue en a.

Rappel 2 (« théorème convergence uniforme + différentiabilité »)

Soient Ω un ouvert convexe de $\mathbb{R}^N$ et $f_n\colon \Omega \to \mathbb{C}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

On suppose que
- f_n est différentiable pour chaque $n \in \mathbb{N}$;
- il existe $x_0 \in \Omega$ pour lequel la suite $\big(f_n(x_0)\big)_{n\geq 0}$ converge ;
- la suite $(\mathrm{d}f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément.

Alors $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur toute partie bornée de Ω vers une fonction différentiable F telle que : $\mathrm{d}F(x)\cdot h = \lim\limits_{n\to+\infty} (\mathrm{d}f_n(x)\cdot h)$ pour $x \in \Omega$ et $h \in \mathbb{R}^N$.

Proposition

Soient $(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}\setminus\{0\}}$.

On pose : $\quad S_n(x) = a_0 + \sum\limits_{1\leq k\leq n} \big(a_k \cos(2\pi kx) + b_k \sin(2\pi kx)\big) \quad$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

(a) Si $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n| < +\infty$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |b_n| < +\infty$ alors $(S_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

en marge du programme

(b) Si $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ sont des suites de réels décroissantes de limite 0, alors $(S_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur tout compact de $]0,1[$.

(c) Si $(S_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$, vers une application notée f, alors $f \in \mathscr{C}(\mathbb{T})$ et, $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ se déduisent de f par les formules intégrales du (a) ci-dessous.

Définition

Soit $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$.

(a) On pose : $\quad \boxed{\widehat{f}(n) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi nt}\,\mathrm{d}t} \quad$ pour $n \in \mathbb{Z}$,

$a_0 = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$, $a_n = 2\int_0^1 f(t)\cos(2\pi nt)\,\mathrm{d}t$ et $b_n = 2\int_0^1 f(t)\sin(2\pi nt)\,\mathrm{d}t$ pour $n \geq 1$.(*)

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle *somme partielle d'ordre n de la série de Fourier de f* la fonction $S_n(f)$ déterminée par : $\boxed{S_n(f)(x) = \sum\limits_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi kx} = a_0 + \sum\limits_{1\leq k\leq n} (a_k\cos(2\pi kx) + b_k \sin(2\pi kx))}$.

complément

Théorème (« théorème de Riemann-Lebesgue »)

Soit $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$.

La « suite » $\widehat{f} := (\widehat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ appartient à $c_0(\mathbb{Z}) := \{(c_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} \mid \lim\limits_{n\to-\infty} c_n = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 0\}$.

Théorème

La transformation de Fourier $\mathcal{F}_{L^1(\mathbb{T})}\colon \begin{array}{ccc} L^1(\mathbb{T}) & \to & c_0(\mathbb{Z}) \\ f & \mapsto & \widehat{f} \end{array}$ est linéaire, injective et $\underbrace{\text{continue}}_{c_0(\mathbb{Z}) \text{ est muni de } \|\ \|_\infty}$.

(*) Ainsi :
- $\widehat{f}(0) = a_0$, $\widehat{f}(n) = \frac{a_n - \mathrm{i}b_n}{2}$ et $\widehat{f}(-n) = \frac{a_n + \mathrm{i}b_n}{2}$ pour $n \geq 1$;
- $a_0 = \widehat{f}(0)$, $a_n\cos(2\pi nx) + b_n \sin(2\pi nx) = \widehat{f}(-n)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi nx} + \widehat{f}(n)\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi nx}$ pour $n \geq 1$.

Théorème (« théorème de Fejér »)

Soit f un élément de $E := \mathscr{C}(\mathbb{T})$ muni de $\| \ \|_\infty$. ⟵[cet énoncé reste valable en prenant $E := L^1(\mathbb{T})$ muni de $\| \ \|_1$]

La suite $\left(\frac{S_0(f)+\cdots+S_n(f)}{n+1}\right)_{n\geq 0}$ converge dans E vers f.

Remarques

(a) Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels. On pose $\sigma_n = \frac{u_0+\cdots+u_{n-1}}{n}$ pour $n \geq 1$.

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ alors $\sigma_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ « lemme de Cesàro ».

Soient $f \in \mathscr{C}(\mathbb{T})$ et $x_0 \in \mathbb{T}$. Si $(S_n(f)(x_0))_{n\geq 1}$ converge, on a donc $S_n(f)(x_0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x_0)$.

(b) Le th. de Fejér redonne la densité de l'algèbre des polynômes trigonométriques dans $\mathscr{C}(\mathbb{T})$ (conséquence du th. de Stone-Weierstrass) et l'injectivité de la transformation de Fourier.$^{(\star)}$

Théorème (« théorème de Dirichlet »)

Soient $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{T})$ et $x_0 \in \mathbb{R}$.

On suppose que f vérifie les hypothèses suivantes (qui portent sur $f|_{\text{voisinage de } x_0}$) :

(i) f a des limites finies $f(x_0^-)$ à gauche en x_0 et $f(x_0^+)$ à droite en x_0 ;

(ii) $h>0 \mapsto \frac{f(x_0-h)-f(x_0^-)}{h}$ et $h>0 \mapsto \frac{f(x_0+h)-f(x_0^+)}{h}$ ont des limites finies en 0^+.

Alors $\boxed{S_n(f)(x_0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{f(x_0^-)+f(x_0^+)}{2}}$.$^{(\star\star)}$

Proposition

La famille $\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi n\cdot}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$.

Donc $\begin{array}{rccc} \mathcal{F}_{L^2(\mathbb{T})}\colon & L^2(\mathbb{T}) & \to & l^2(\mathbb{Z}) \\ & f & \mapsto & \big(\underbrace{\widehat{f}(n)}_{\langle f, \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi n\cdot}\rangle}\big)_{n\in\mathbb{Z}} \end{array}$ est $\underbrace{\text{une bijection de réciproque}}_{\text{en particulier } S_n(f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f \text{ dans } L^2(\mathbb{T}) \text{ lorsque } f\in L^2(\mathbb{T})}$ $\begin{array}{rccc} \overline{\mathcal{F}}_{l^2(\mathbb{Z})}\colon & l^2(\mathbb{Z}) & \to & L^2(\mathbb{T}) \\ & (c_n)_{n\in\mathbb{Z}} & \mapsto & \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi n\cdot} \end{array}$ ↑ sommable pour $\| \ \|_2$

et on a $\boxed{\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{f}(n)\right|^2 = \int_0^1 |f(t)|^2\,\mathrm{d}t}$ pour tout $f\in L^2(\mathbb{T})$ « égalité de Bessel-Parseval ».

en marge du programme

Proposition

L'application $\begin{array}{rccc} \overline{\mathcal{F}}_{l^1(\mathbb{Z})}\colon & l^1(\mathbb{Z}) & \to & \mathscr{C}(\mathbb{T}) \\ & (c_n)_{n\in\mathbb{Z}} & \mapsto & \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi n\cdot} \end{array}$ est linéaire, injective et continue.$^{(\star\star\star)}$ ↑ sommable pour $\| \ \|_\infty$

De plus, toute $\underbrace{f\in\mathscr{C}(\mathbb{T}) \text{ telle que } \widehat{f}\in l^1(\mathbb{Z})}_{\text{par exemple } f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{T}),\text{ cf. la proposition ci-dessous}}$ vérifie $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi n\cdot}$ dans $\mathscr{C}(\mathbb{T})$. ⟵[$\mathcal{F}$ injective]

Proposition

Soient $k\in\mathbb{N}$ et $f\in\mathscr{C}^k(\mathbb{T})$. On a : $\boxed{\widehat{f^{(k)}}(n) = (2\mathrm{i}\pi n)^k\,\widehat{f}(n)}$ pour $n\in\mathbb{Z}$. ⟵[penser à $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi nx}$]

En particulier : toute fonction $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{T})$ est somme de sa série de Fourier (car $\widehat{f}\in l^1(\mathbb{Z})$).

$(\star)$ Il redonne aussi le th. de Weierstrass : toute fonction $f\in\mathscr{C}([a,b])$ avec $a<b$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales. En effet, en introduisant l'unique $g\in\mathscr{C}(\mathbb{T})$ paire vérifiant $g(\frac{t}{2}) = f((1-t)a+tb)$ pour tout $t\in[0,1]$ et en fixant $\varepsilon>0$, il existe $n\geq 0$ tel que $\|g-g_n\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ où $g_n := \frac{S_0(g)+\cdots+S_n(g)}{n+1}$, puis il existe une somme partielle P du développement en série entière de g_n en 0 telle que $\|(P-g_n)|_{[0,1]}\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$.

$(\star\star)$ Voici deux résultats difficiles à démontrer, relatifs à la « série de Fourier » $(S_n(f))_{n\geq 0}$ d'une fonction $f\in\mathscr{L}^1(\mathbb{T})$:

(i) si $f\in\mathscr{L}^2(\mathbb{T})$, alors $(S_n(f))_{n\geq 0}$ converge presque partout vers f « théorème de Carleson-Hunt » (cas $p=2$) ;

(ii) il existe $f\in\mathscr{L}^1(\mathbb{T})$ tel que $(S_n(f))_{n\geq 0}$ diverge en tout point « contre exemple de Kolmogorov ».

$(\star\star\star)$ L'injectivité découle du (c) de la proposition du début, car pour toute suite $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}\in l^1(\mathbb{Z})$, la fonction continue $f\colon x\mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi nx}$ vérifie $\widehat{f}(n) = c_n$ quand $n\in\mathbb{Z}$.