Espaces métriques et espaces topologiques : rappels (J-Y D)

Définition

On considère un ensemble E.

(a) Une *distance* sur E est une application $d\colon E \times E \to \mathbb{R}^+$ vérifiant :
(i) $\forall x, y \in E \quad d(x,y) = 0 \iff x = y$;
(ii) $\forall x, y \in E \quad d(x,y) = d(y,x)$;
(iii) $\forall x, y, z \in E \quad d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (« inégalité triangulaire »).

(b) On suppose que d est une distance sur E (on dira que (E,d) *est un espace métrique*).
Les *boules ouverte et fermée de centre* $x_0 \in E$ *et de rayon* $r > 0$ sont :

$$B(x_0, r) := \{x \in E \mid d(x, x_0) < r\} \quad \text{et} \quad \widetilde{B}(x_0, r) := \{x \in E \mid d(x, x_0) \leq r\}.$$

Le *diamètre* d'une partie non vide A de E est : $\operatorname{diam} A := \sup\limits_{x,y \in A} d(x,y) \leq +\infty$.
Par convention : $\operatorname{diam}(\emptyset) = 0$. On dit qu'une partie A de E est *bornée* si $\operatorname{diam} A < +\infty$.

Exemple

Soient A un ensemble et (E,d) un espace métrique.
On pose : $d_u(f,g) := \min\big(\sup\limits_{x \in A} d(f(x), g(x)), 1\big)$ pour $f, g\colon A \to E$.
L'application d_u est une distance sur E^A, appelée *distance de la convergence uniforme*.

Définition-Proposition

(a) Soient (E,d) un espace métrique et F une partie de E.
La *distance induite sur F par celle de E* est la distance $(x,y) \in F \times F \mapsto d(x,y)$ sur F.
La boule ouverte de centre $x_0 \in F$ et de rayon $r > 0$ dans F est l'intersection avec F de celle de E.

(b) Soient (E_1, d_1) et (E_n, d_n) des espaces métriques.
La *distance produit sur* $E_1 \times ... \times E_n$ est la distance δ_∞ sur $E_1 \times ... \times E_n$ définie par :

$$\delta_\infty(x,y) = \max_{1 \leq i \leq n} d_i(x_i, y_i) \quad \text{quand} \quad x = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \text{ et } y = (y_i)_{1 \leq i \leq n} \text{ sont dans } \prod_{1 \leq i \leq n} E_i.^{(*)}$$

La boule ouverte de centre $(x_1, ..., x_n)$ et de rayon $r > 0$ dans $E_1 \times ... \times E_n$ est $B(x_1, r) \times ... \times B(x_n, r)$.

(c) Soit $\big((E_n, d_n)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'espaces métriques.
La *distance produit sur* $\prod\limits_{n \in \mathbb{N}} E_n$ est la distance δ_∞ sur $\prod\limits_{n \in \mathbb{N}} E_n$ définie par :

$$\delta_\infty(x,y) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \min\big(d_n(x_n, y_n), \tfrac{1}{2^n}\big) \quad \text{quand} \quad x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ sont dans } \prod_{n \in \mathbb{N}} E_n.$$

hors programme

Définition

(a) Un espace topologique est un ensemble X muni d'un ensemble $\mathscr{T}$ de parties de X, tels que :
(i) $\emptyset \in \mathscr{T}$ et $X \in \mathscr{T}$;
(ii) l'intersection de deux éléments quelconques de $\mathscr{T}$ appartient à $\mathscr{T}$;
(iii) la réunion d'une famille quelconque d'éléments de $\mathscr{T}$ appartient à $\mathscr{T}$.
Dans ce cas, cet ensemble $\mathscr{T}$ s'appelle *la topologie* dont on munit de X.

(b) On se donne ici un espace topologique $(X, \mathscr{T})$ et $a \in X$.
On dit qu'une partie U de X est *ouverte* (ou que U est *un ouvert de* X) si U appartient à $\mathscr{T}$.
On dit qu'une partie F de X est *fermée* (ou que F est *un fermé de* X) si $\complement_X F$ est ouverte.
On dit qu'une partie V de X est *un voisinage de* a si V contient un ouvert U contenant a.
On note $\mathcal{V}(a)$ l'ensemble des voisinages de a.

(c) On dit qu'un espace topologique $(X, \mathscr{T})$ est séparé (ou que sa topologie est séparée) si pour tous $a, b \in X$ distincts, il existe $U \in \mathcal{V}(a)$ et $V \in \mathcal{V}(b)$ tels que $U \cap V = \emptyset$.

$(*)$ Les distances $\delta_1\colon (x,y) \mapsto \sum\limits_{1 \leq i \leq n} d_i(x_i, y_i)$ et $\delta_2\colon (x,y) \mapsto \big(\sum\limits_{1 \leq i \leq n} d_i(x_i, y_i)^2\big)^{\frac{1}{2}}$ sur $E_1 \times ... \times E_n$ se comparent à δ_∞ au moyen des inégalités suivantes, qui sont « immédiates » : $\delta_\infty \leq \delta_2 \leq \delta_1 \leq \sqrt{n}\,\delta_2 \leq n\,\delta_\infty$.

Proposition

Soit (E, d) un espace métrique. On va construire à partir de d une topologie sur E.

(a) Les réunions de familles quelconques de boules ouvertes de E forment une topologie sur E. Cette topologie est séparée. Toute boule ouverte (resp. boule fermée) est ouverte (resp. fermée).

(b) Une partie U de E est ouverte si et seulement :

$$\boxed{\forall x_0 \in U \quad \exists r > 0 \quad B(x_0, r) \subseteq U}.$$

Un voisinage d'un point a de E est une partie de E qui contient une boule ouverte centrée en a.

Définition-Proposition

$\longleftarrow$ (à connaître dans le cas des espaces métriques)

(a) Soient $(X, \mathscr{T})$ un espace topologique et A une partie de X.

On appelle *intérieur de* A la partie $\mathring{A} := \{x \in A \mid A \in \mathcal{V}(x)\}$ de X et *adhérence de* A la partie $\overline{A} := \{x \in X \mid \forall V \in \mathcal{V}(x) \;\; V \cap A \neq \emptyset\}$ de X.

On a : $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert de X inclus dans A et $\overline{A}$ est le plus petit fermé de X contenant A. En particulier : A est ouverte (resp. fermée) si et seulement si $A = \mathring{A}$ (resp. $A = \overline{A}$).

On a aussi : $\mathring{A} \subseteq A \subseteq \overline{A}$, $\complement_X \mathring{A} = \overline{\complement_X A}$ et $\complement_X \overline{A} = \widehat{\complement_X A}^{\circ}$.

On appelle *frontière de* A, et note ∂A, le complémentaire de $\mathring{A}$ dans $\overline{A}$.

(b) Soient $(X, \mathscr{T})$ un espace topologique et A une partie de X.

On dit que A *est dense dans* X si $\overline{A} = X$.

Un point isolé de A est un point de A qui a un voisinage ne contenant pas d'autre point de A.

Un point d'accumulation pour A est un $x \in X$ dont tout voisinage contient un point de $A \backslash \{x\}$.

Ainsi $\overline{A}$ est la réunion disjointe de l'ensemble des points isolés de A et de l'ensemble des points d'accumulation pour A.

(c) Soit (E, d) un espace métrique et A une partie de E. On verra plus tard la définition d'une « suite convergente dans E » (définition connue dans le cas où E est égal à $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$).

$\boxed{\text{La partie } \overline{A} \text{ est l'ensemble des limites des suites d'éléments de } A \text{ qui convergent dans } E}$ (⋆).

Les points d'accumulations de A sont les $x \in E$ limite d'une suite convergente d'éléments de $A \backslash \{x\}$.

hors programme

Définition-Proposition

(a) Soient $(X, \mathscr{T})$ un espace topologique et Y une partie de X.

La *topologie induite sur* Y *par celle de* X est la topologie $\mathscr{U} := \{U \cap Y \; ; \; U \in \mathscr{T}\}$ sur Y. (Lorsque $\mathscr{T}$ provient d'une distance, la topologie induite provient de la distance induite.) Les ouverts, fermés, voisinages d'un point a de Y dans Y sont les intersections avec Y de ceux de X. Lorsque la topologie de X est séparée, la topologie induite sur Y est séparée.

(b) Soient $(X_1, \mathscr{T}_1)$, ..., $(X_n, \mathscr{T}_n)$ des espaces topologiques.

La *topologie produit sur* $X_1 \times ... \times X_n$ est la topologie dont les éléments sont les réunions de parties de la forme $U = U_1 \times ... \times U_n$ avec $U_1 \in \mathscr{T}_1$, ..., $U_n \in \mathscr{T}_n$. (Lorsque $\mathscr{T}_1$, ..., $\mathscr{T}_n$ proviennent de distances, la topologie produit provient de la distance produit.) Les voisinages d'un point $(a_1, ..., a_n)$ de $X_1 \times ... \times X_n$ sont les parties de $X_1 \times ... \times X_n$ qui contiennent un certain $U_1 \times ... \times U_n$ avec U_1 ouvert de X_1 contenant a_1, ..., U_n ouvert de X_n contenant a_n. Lorsque les topologies de X_1, ..., X_n sont séparées, la topologie produit sur $X_1 \times ... \times X_n$ est séparée.

(c) Soit $((X_i, \mathscr{T}_i))_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques..

La *topologie produit sur* $\prod\limits_{i \in I} X_i$ est la topologie dont les éléments sont les réunions de parties de la forme $U = \prod\limits_{i \in I} U_i$ avec $U_i \in \mathscr{T}_i$ pour tout $i \in I$ et l'ensemble $J := \{i \in I \mid U_i \neq X_j\}$ est fini. (Lorsque $I = \mathbb{N}$ et les $\mathscr{T}_n$ proviennent de distances, cette topologie provient de la distance produit.)

(⋆) Cette caractérisation, très utile, est *fausse* dans le cas d'un espace topologique quelconque.

Suites et applications continues : rappels (J-Y D)

On considère des espaces métriques (E, d_E) et (F, d_F), et des espaces topologiques X, Y et Z.

Définition

(a) On dit qu'une application $f\colon E \to F$ est *continue en* $a \in E$ si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in E \quad \big(d_E(x,a) < \alpha \implies d_F(f(x), f(a)) < \varepsilon \big).$$

On dit qu'une telle application $f\colon E \to F$ est *continue* si elle est continue en tout point de E.

(b) On dit qu'une suite $\big(u_n\big)_{n\geq 0}$ d'éléments de E *a pour limite* $l \in E$ *quand* $n \to +\infty$ si :

$$\underbrace{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \big(n \geq N \implies d_E(u_n, l) < \varepsilon \big)}_{\text{signifie que } d_E(u_n,l) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}.$$

On notera comme d'habitude « $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ » pour exprimer que $\big(u_n\big)_{n\geq 0}$ a pour limite l.

(c) On dit qu'une suite $\big(u_n\big)_{n\geq 0}$ d'éléments de E *a pour valeur d'adhérence* $\lambda \in E$ si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \big(n \geq N \text{ et } d_E(u_n, \lambda) < \varepsilon \big).$$

Remarque

On suppose que les espaces métriques produits usuels $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$ sont munis de bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$.

(a) Si $f\colon \underset{\text{partie de } \mathbb{R}^p}{A} \longrightarrow \mathbb{R}^q$ envoie tout $\underset{/\mathscr{B}}{v}\left|\begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p\end{matrix}\right. \in A$ sur $\underset{/\mathscr{C}}{f(v)}\left|\begin{matrix} f_1(x_1,\dots,x_p) \\ \vdots \\ f_q(x_1,\dots,x_p)\end{matrix}\right. \in \mathbb{R}^q$ et $\underset{/\mathscr{B}}{a}\left|\begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p\end{matrix}\right. \in A$, on a : f est continue en a si et seulement si f_1 et ... et f_q sont continues en $(a_1, ..., a_p)$.

(b) Si une suite $\big(u_n\big)_{n\geq 0}$ d'éléments de $\mathbb{R}^p$ s'écrit $\underset{/\mathscr{B}}{u_n}\left|\begin{matrix} x_{1,n} \\ \vdots \\ x_{p,n}\end{matrix}\right.$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $\underset{/\mathscr{B}}{l}\left|\begin{matrix} l_1 \\ \vdots \\ l_p\end{matrix}\right. \in \mathbb{R}^p$, on a : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ si et seulement si $x_{1,n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l_1$ et ... et $x_{p,n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l_p$.

Définition-Proposition

Les deux définitions suivantes (dont découle la dernière) généralisent la définition ci-dessus.

(a) On dit qu'une application $f\colon X \to Y$ est *continue en* $a \in X$ si :

$$\forall V \in \mathcal{V}(f(a)) \quad \underbrace{\exists U \in \mathcal{V}(a) \quad f(U) \subseteq V}_{\text{signifie que } f^{-1}(V) \text{ est un voisinage de } a}.$$

On dit qu'une application $f\colon X \to Y$ est *continue* si elle est continue en tout point de X.

(b) On se donne $A \subseteq X$ et $a \in \overline{A}$ (par exemple $A = X$ et $a \in X$), et $l \in Y$.

On dit qu'une application $f\colon A \to Y$ a *pour limite* l *quand* $x \to a$ *avec* $x \in A$ si :

$$\forall V \in \mathcal{V}(l) \quad \exists U \in \mathcal{V}(a) \quad f(U \cap A) \subseteq V. \qquad \longleftarrow\text{[voisinages dans } Y \text{ et dans } X]$$

On notera « $f(x) \underset{x\to a,\, x\in A}{\longrightarrow} l$ » pour exprimer que f a pour limite l quand $x \to a$ avec $x \in A$.$^{(\star)}$ Dans ce cas et lorsque Y est séparé, cet élément l de Y est unique et noté $\lim\limits_{x\to a,\, x\in A} f(x)$.

(c) On dit qu'une suite $\big(u_n\big)_{n\geq 0}$ d'éléments de Y *a pour limite* $l \in Y$ *quand* $n \to +\infty$ si :

$$\forall V \in \mathcal{V}(l) \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \big(n > N \implies u_n \in V \big).$$

Il s'agit du cas particulier du (b) avec $\underbrace{X = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}}_{\text{on prolonge } u_. \text{ avec une valeur de } u_{+\infty} \text{ arbitraire}}$ (donc $X \subseteq \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$) et $A = \mathbb{N}$.

$(\star)$ Quand $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$, on obtient les notions de limites finies suivantes : $x \to a$ $(X = A = \mathbb{R})$, $x \underset{x\neq a}{\longrightarrow} a$ $(X = \mathbb{R}$ et $A = \mathbb{R}\backslash\{a\})$, $x \to a^-$ $(X = \mathbb{R}$ et $A =]-\infty, a[)$, $x \to a^+$ $(X = \mathbb{R}$ et $A =]a, +\infty[)$, $x \to -\infty$ $(\underbrace{X = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}}_{\text{on prolonge } f \text{ avec une valeur de } f(-\infty) \text{ arbitraire}}$ et $A = \mathbb{R})$, $x \to +\infty$ $(\underbrace{X = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}}_{\text{on prolonge } f \text{ avec une valeur de } f(+\infty) \text{ arbitraire}}$ et $A = \mathbb{R})$.

Dans ces derniers exemples, la topologie de $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ est celle qui induit la topologie de $\mathbb{R}$ et pour laquelle les voisinages de $-\infty$ (resp. $+\infty$) sont les parties contenant $[-\infty, \alpha[$ (resp. $]\alpha, +\infty]$) pour un $\alpha \in \mathbb{R}$.

Remarque

(a) La distance d'un espace métrique est continue (découle de : $|d(x,y) - d(y,z)| \leq d(x,z)$).

(b) Soient $A \subseteq X$ et $B \subseteq Y$, $f\colon X \to Y$ telle que $f(A) \subseteq B$, et $a \in A$.

Si f est continue en a, alors la restriction $f|_{A,B}\colon A \to B$ qui envoie $x \in A$ sur $f(x) \in B$ est continue en a. La réciproque est vraie lorsque A est un voisinage de a dans X.

(c) Soit $(x_0, y_0) \in X \times Y$. Si $u\colon X \times Y \to Z$ est continue en (x_0, y_0), alors l'application $u(\cdot, y_0)\colon X \to Z$ est continue en x_0 et l'application $u(x_0, \cdot)\colon Y \to Z$ est continue en y_0.

(d) Soit $x_0 \in X$. Une application $v\colon \begin{array}{rcl} X & \to & Y \times Z \\ x & \mapsto & (v_1(x), v_2(x)) \end{array}$ est continue en x_0 si et seulement si les applications $v_1\colon X \to Y$ et $v_2\colon X \to Z$ sont continues en x_0. ←[donc $\begin{array}{rcl} Y \times Z & \to & Y \times Z \\ (y,z) & \mapsto & y \end{array}$ et $\begin{array}{rcl} Y \times Z & \to & Y \times Z \\ (y,z) & \mapsto & z \end{array}$ sont continues]

(e) Soit $(k, l) \in Y \times Z$. Une suite $\big((v_n, w_n)\big)_{n \geq 0}$ d'éléments de $Y \times Z$ a pour limite (k, l) si et seulement si la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ a pour limite k et la suite $(w_n)_{n \geq 0}$ a pour limite l.

Proposition

(a) Une application $f\colon X \to Y$ est continue si et seulement si :

$$\forall\, V \text{ ouvert de } Y \quad f^{-1}(V) \text{ est un ouvert de } X.$$

On a une caractérisation analogue en remplaçant « ouvert » par « fermé ».

(b) Si $f\colon X \to Y$ est continue en $a \in X$ et $g\colon Y \to Z$ est continue en $f(a)$, alors l'application $g \circ f\colon X \to Z$ est continue en a.

(c) Si $(u_n)_{n \geq 0}$ a pour limite b dans Y et $g\colon Y \to Z$ est continue en b, alors $g(u_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} g(b)$.

généralise (b) et (c)

(d) On se donne $A \subseteq X$ et $a \in \overline{A}$, $B \subseteq Y$ et $b \in \overline{B}$, $l \in Z$.

Si $\left|\begin{array}{l} f\colon A \to Y \text{ vérifie } f(A) \subseteq B \text{ et } f(x) \underset{x \to a,\, x \in A}{\longrightarrow} b, \\ g\colon B \to Z \text{ vérifie } g(y) \underset{y \to b,\, y \in B}{\longrightarrow} l \end{array}\right.$ alors $(g \circ f)(x) \underset{x \to a,\, x \in A}{\longrightarrow} l$.

Corollaire

Toute réunion finie de parties de X de la forme

$$\{x \in X \mid \alpha_1(x) < a_1, ..., \alpha_p(x) < a_p, \beta_1(x) > b_1, ..., \beta_q(x) > b_q, \gamma_1(x) \neq c_1, ..., \gamma_r(x) \neq c_r\}$$

$$\big(\text{resp. } \{x \in X \mid \alpha_1(x) \leq a_1, ..., \alpha_p(x) \leq a_p, \beta_1(x) \geq b_1, ..., \beta_q(x) \geq b_q, \gamma_1(x) = c_1, ..., \gamma_r(x) = c_r\}\big)$$

avec $\alpha_1, ..., \alpha_p, \beta_1, ..., \beta_q, \gamma_1, ..., \gamma_r\colon X \to \mathbb{R}$ continues et $a_1, ..., a_p, b_1, ..., b_q, c_1, ..., c_r \in \mathbb{R}$ est ouverte (resp. fermée).

Définition-Proposition

(a) On dit qu'une application $f\colon X \to Y$ est *un homéomorphisme* si :

f est bijective, et les applications f et f^{-1} sont continues.

(b) On dit qu'une application $f\colon E \to F$ est *uniformément continue* si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x, y \in E \quad \big(d_E(x,y) < \alpha \implies d_F(f(x), f(y)) < \varepsilon \big).$$

Dans ce cas, f est continue.

(c) Soit $k \geq 0$. On dit qu'une application $f\colon E \to F$ est *k-lipschitzienne* si :

$$\forall x, y \in E \quad d_F(f(x), f(y)) \leq k\, d_E(x,y).$$

Dans ce cas, f est uniformément continue.

Définition

Soit E un ensemble muni de deux distances d_1 et d_2. On note $\mathrm{id}_E\colon E \to E$ l'application $x \mapsto x$.

(a) On dit que d_1 et d_2 sont *topologiquement équivalentes* si :
id_E est continue de (E, d_1) dans (E, d_2) et de (E, d_2) dans (E, d_1).
(Cela signifie que d_1 et d_2 définissent la même topologie sur E.)

(b) On dit que d_1 et d_2 sont *uniformément équivalentes* si :
id_E est uniformément continue de (E, d_1) dans (E, d_2) et de (E, d_2) dans (E, d_1).

(c) On dit que d_1 et d_2 sont *Lipschitz-équivalentes* si :
id_E est lipschitzienne de (E, d_1) dans (E, d_2) et de (E, d_2) dans (E, d_1).

Espaces métriques complets : rappels (J-Y D)

On considère deux espaces métriques E et F.

Définition

(a) On dit qu'une suite $\big(u_n\big)_{n\geq 0}$ d'éléments de E est *une suite de Cauchy* si :

$$\underbrace{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall p, q \in \mathbb{N} \quad \big(\, p \geq N \text{ et } q \geq N \implies d(u_p, u_q) < \varepsilon \,\big)}_{\text{s'écrit en abrégé : } d(u_p,u_q) \underset{\min(p,q)\to+\infty}{\longrightarrow} 0}.$$

(b) On dit que l'espace métrique E est *complet* si toute suite de Cauchy dans E est convergente.

(c) On dit qu'une application $f\colon E \to F$ est *contractante* si elle est k-lipschitzienne pour un certain $k \geq 0$ qui vérifie $k < 1$.

(d) On dit qu'une application $f\colon E \to F$ est *isométrique* si : $\forall x, y \in E \quad d(f(x), f(y)) = d(x, y)$.

Proposition

(a) Toute partie complète d'un espace métrique est fermée.

Toute partie fermée d'un espace métrique complet est complète.

(b) L'image d'une suite de Cauchy par une application uniformément continue d'un espace métrique dans un autre est une suite de Cauchy.

(c) Un produit fini ou dénombrable d'espaces métriques complets est complet.

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$. L'espace métrique $\mathbb{R}$ est complet, donc l'espace métrique $\mathbb{R}^n$ est complet (pour une distance associée à une norme quelconque) et ses parties complètes sont ses parties fermées.

(e) On suppose que E est complet. Pour tout ensemble A, l'ensemble E^A des applications de A dans E est complet pour la distance d_u de la convergence uniforme.$^{(\star)}$

Théorème (« théorème du point fixe »)

On suppose que E est complet non-vide et que $f\colon E \to E$ est contractante.

Alors il existe $l \in E$ unique tel que $f(l) = l$, et pour tout $x_0 \in E$ la suite récurrente $(x_n)_{n\geq 0}$ déterminée par la relation $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers l.$^{(\star\star)}$

Proposition

(a) On suppose que D est une partie dense de E et que F est complet.

Toute application uniformément continue $f\colon D \to F$ a un unique prolongement continu $\tilde{f}\colon E \to F$; de plus $\tilde{f}$ est uniformément continue.

(b) Il existe un espace métrique complet $\widetilde{E}$, appelé *complété de* E, muni d'une application isométrique d'image dense $\tilde{i}\colon E \to \widetilde{E}$. Pour tout autre couple $(\widetilde{\widetilde{E}}, \tilde{\tilde{i}})$ qui convient dans le rôle de $(\widetilde{E}, \tilde{i})$, il existe une bijection isométrique $j\colon \widetilde{E} \to \widetilde{\widetilde{E}}$ telle que $\tilde{\tilde{i}} = j \circ \tilde{i}$.

Proposition

(a) Les suites de Cauchy dans E sont les suites de points de E convergentes dans $\widetilde{E}$.

En particulier toute suite de Cauchy est bornée, et toute suite convergente est de Cauchy.

(b) Tout espace métrique compact est complet (car il est fermé dans son complété).

$(\star)$ On note ici $(E^A)_b$ le fermé de E^A formée des applications dont l'image est bornée. Il est aussi muni de la distance d_∞ définie par $d_\infty(f, g) = \sup\limits_{x\in A} d(f(x), g(x))$. Comme d_∞ est uniformément équivalentes à la distance induite par d_u, l'ensemble $(E^A)_b$ muni de d_∞ est complet quand E est complet.

$(\star\star)$ Quand f est k-contractante on a la majoration suivante de l'erreur commise en approximant l par x_n :

$$d(x_n, l) \leq \tfrac{k^n}{1-k}\, d(x_0, x_1) \qquad \text{pour tout } n \geq 0.$$

On suppose dans la suite que $\underline{E \text{ et } F \text{ sont des espace vectoriels normés sur } \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}}$.

Définition

(a) On appelle *espace de Banach* un espace vectoriel normé qui est complet pour la distance associée à sa norme.

(b) On appelle *série d'éléments de E* une suite $(\sum u_n)_{n\geq 0}$ de la forme $\left(u_n, \sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\geq 0}$ où $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite d'éléments de E. Sa convergence équivaut donc à celle de la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\geq 0}$.

(c) La *somme* d'une série convergente $(\sum u_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de E est le vecteur $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ suivant :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

(d) On dit qu'une série $(\sum u_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de E est *normalement convergente* si $\sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\| < +\infty$.

Exemples

(a) Soit K un espace topologique compact. L'espace vectoriel $\underbrace{\mathscr{C}(K,\mathbb{R})}_{\text{fermé de l'espace des applications bornées de } K \text{ dans } \mathbb{R}}$ des applications continues de K dans $\mathbb{R}$, muni de la norme de la convergence uniforme, est un espace de Banach.

(b) Si F est un espace de Banach, l'espace vectoriel $\underbrace{\mathscr{L}(E,F)}_{\text{s'identifie à un fermé de l'espace des applications bornées, de la boule unité fermée de } E \text{, dans } F}$ des applications linéaires continues de E dans F, muni de la norme des applications linéaires, est un espace de Banach.

Proposition

(a) On suppose que D est un sous-espace vectoriel dense de E et que F est un espace de Banach. Toute application $f \in \mathscr{L}(D,F)$ a un unique prolongement $\tilde{f} \in \mathscr{L}(E,F)$; de plus $\|\tilde{f}\| = \|f\|$.

(b) Il existe un espace de Banach $\widetilde{E}$, appelé *complété de E*, muni d'une application linéaire isométrique(⋆⋆⋆) d'image dense $\tilde{i} \colon E \to \widetilde{E}$. Pour tout autre couple $(\breve{E}, \breve{i})$ qui convient dans le rôle de $(\widetilde{E}, \tilde{i})$, il existe une bijection linéaire isométrique $j \colon \widetilde{E} \to \breve{E}$ telle que $\breve{i} = j \circ \tilde{i}$.

Proposition

(a) Si une série $(\sum u_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de E converge, elle vérifie :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad \left\|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\| \leq +\infty.$$

(b) Toute série absolument convergente d'éléments d'un espace de Banach est convergente.(⋆⋆⋆⋆)

(⋆⋆⋆) Une application linéaire $f \colon E \to F$ est isométrique si et seulement si : $\forall x \in E \quad \|f(x)\| = \|x\|$.

(⋆⋆⋆⋆) Plus précisément, E est un espace de Banach si et seulement si toute série absolument convergente d'éléments de E est convergente.

$\underbrace{\text{Espaces topologiques compacts}}_{\text{(à connaître dans le cas des espaces métriques)}}$: rappels (J-Y D)

On considère un espace topologique X et un espace métrique E.

Définition

(a) On appelle *recouvrement de* X une famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties de X telle que $X = \bigcup\limits_{i\in I} A_i$. Dans ce cas, un *sous-recouvrement de* $(A_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de X de la forme $(A_j)_{j\in J}$ avec $J \subseteq I$.

(b) On dit que l'espace topologique X est *compact* si X est séparé et tout recouvrement $(U_i)_{i\in I}$ de X à l'aide d'ouverts U_i a un sous-recouvrement $(U_j)_{j\in J}$ avec J fini.

(c) On appelle *suite extraite* d'une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de E une suite de la forme $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ où $(n_k)_{k\geq 0}$ est une suite strictement croissante d'éléments de $\mathbb{N}$.

Lemme

Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de E.

Les valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n\geq 0}$ sont les limites des suites extraites de $(x_n)_{n\geq 0}$ qui convergent.

Proposition

(a) Toute partie compacte d'un espace topologique séparé est fermée.

Toute partie fermée d'un espace topologique compact est compacte.

(b) L'image d'une application continue d'un espace topologique compact dans un espace topologique séparé est compacte. En particulier, une bijection continue d'un espace topologique compact dans un espace topologique séparé est un homéomorphisme, car elle envoie un fermé sur un fermé.

(c) Un produit d'espaces topologiques compacts est compact (« théorème de Tychonoff »).

Proposition

(a) L'espace métrique E est compact si et seulement si toute suite $(x_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de E possède une suite extraite $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ qui converge (« théorème de Bolzano-Weierstrass »).

(b) Toute application continue d'un espace métrique compact dans un espace métrique est uniformément continue (« théorème de Heine »).

Proposition

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

(a) Les parties compactes de $\mathbb{K}^n$ sont ses parties fermées et bornées pour $\| \ \|_\infty$.

(b) Une partie compacte non-vide de $\mathbb{R}$ a donc un plus petit élément et un plus grand élément. En particulier, toute application continue d'un espace topologique compact non-vide dans $\mathbb{R}$ prend une plus petite et une plus grande valeur. A fortiori tout espace métrique compact est borné.

(c) Toutes les normes sur $\mathbb{K}^n$ sont équivalentes.$^{(\star)}$

En particulier, on peut remplacer $\| \ \|_\infty$ dans le (a) ci-dessus par n'importe quelle norme sur $\mathbb{K}^n$.

$(\star)$ Une norme N sur $\mathbb{K}^n$ muni de $\| \ \|_\infty$ est $\underbrace{\text{lipschitzienne}}_{\text{grâce à l'inégalité } |N(u)-N(v)| \leq N(u-v)}$ car $N(x) \leq \big(\sum\limits_{1\leq i\leq n} N(e_i)\big)\|x\|_\infty$ pour $x \in \mathbb{K}^n$, où $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est la base canonique, donc $1/N$ est majoré sur la sphère unité pour $\| \ \|_\infty$ qui est compacte.

$\underbrace{\text{Espaces topologiques connexes}}_{\text{(à connaître dans le cas des espaces métriques)}}$: rappels (J-Y D)

On considère un espace topologique X.

Définition

(a) On dit que l'espace topologique X est *connexe* si X n'est pas réunion de deux ouverts disjoints non-vides.

(b) On appelle *chemin de X d'origine $a \in X$ et d'extrémité $b \in X$* une application continue $\gamma\colon [0,1] \to X$ telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.

(Quand γ est un chemin de X joignant a à b et δ est un chemin de X joignant b à c, leur *composé* $\gamma\,\delta\colon t \mapsto \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \delta(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} < s \leq 1 \end{cases}$ *au sens des chemins* est un chemin joignant a à c.)

(c) On dit que l'espace topologique X est *connexe par arcs* si pour tous $a, b \in X$ il existe un chemin de X qui a pour origine a et extrémité b.

Proposition

(a) L'espace topologique X est connexe si et seulement si toute application continue de X dans $\{0,1\}$ est constante. A fortiori la réunion de connexes de X qui ont un point commun est connexe.

(b) L'image d'une application continue d'un espace topologique connexe (resp. connexe par arcs) dans un espace topologique est connexe (resp. connexe par arcs).

(c) Un produit de deux espaces topologiques non-vides est connexe (resp. connexe par arcs) si et seulement si chacun des deux est connexe (resp. connexe par arcs).

Proposition

(a) Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Par conséquent, une application continue d'un espace topologique connexe dans $\mathbb{R}$ qui prend des valeurs α et β prend aussi toutes les valeurs entre α et β (« théorème des valeurs intermédiaires »).

(b) Tout espace topologique connexe par arcs est connexe.

Espaces vectoriels normés : rappels (J-Y D)

Soient E, F, et G des espaces vectoriels sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition

(a) Une *norme* sur E est une application $N\colon E \to \mathbb{R}^+$ vérifiant :
(i) $\forall v \in E \quad N(v) = 0 \iff v = 0$;
(ii) $\forall v \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad N(\lambda v) = |\lambda|\, N(v)$;
(iii) $\forall v, w \in E \quad N(v + w) \leq N(v) + N(w)$ (« inégalité triangulaire »).

(b) On dit que deux normes N_1 et N_2 sur E sont *équivalentes* si :

$$\exists \alpha, \beta > 0 \qquad \alpha N_1 \leq N_2 \leq \beta N_1 \,. \qquad (\star)$$

(c) La *distance* associée à une norme N sur E est l'application $d\colon E \times E \to \mathbb{R}^+$ définie par :

$$\forall x, y \in E \qquad d(x, y) := N(x - y)\,. \qquad (\star\star)$$

Exemple 1 (espaces de fonctions réelles ou complexes)

(a) On définit une norme N sur l'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$, qui « s'identifie » à l'espace des applications polynomiales de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$, en posant : $N(P) := \int_0^1 |P(t)|\, \mathrm{d}t$ pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$.

(b) Soit A un ensemble. On définit une norme $\| \ \|_\infty$ sur l'espace vectoriel $(\mathbb{K}^A)_b$ formé des applications bornées de A dans $\mathbb{K}$ en posant : $\|f\|_\infty := \sup\limits_{x \in A} |f(x)|$ pour tout $f \in (\mathbb{K}^A)_b$.

Rappel

Soit A un ensemble. On pose : $\|f\|_\infty := \sup\limits_{x \in A} |f(x)| \leq +\infty$ pour toute application $f\colon A \to \mathbb{K}$.

(a) On dit qu'une suite $(f_n)_{n \geq 0}$ d'applications de A dans $\mathbb{K}$ *converge simplement* vers une application f de A dans $\mathbb{K}$ si : $f_n(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(x)$ pour tout $x \in A$.

(b) On dit qu'une suite $(f_n)_{n \geq 0}$ d'applications de A dans $\mathbb{K}$ *converge uniformément* vers une application f de A dans $\mathbb{K}$ si : $\|f_n - f\|_\infty \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Dans ce cas $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement vers f.

Exemple 2 (espaces de suites de nombres complexes)

(a) Soit $p \in [1, +\infty[$. On pose : $\|(a_n)_{n \geq 0}\|_p := \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n|^p \right)^{1/p} \leq +\infty$ pour tout $(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$.
On note : $l^p := \left\{ (a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{C}^\mathbb{N} \mid \|(a_n)_{n \geq 0}\|_p < +\infty \right\}$.
L'application $\| \ \|_p$ se restreint en une norme sur l'espace vectoriel complexe l^p.

(b) On note : $l^\infty := \left\{ (a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{C}^\mathbb{N} \mid \|(a_n)_{n \geq 0}\|_\infty < +\infty \right\}$ l'espace vectoriel des suites bornées.
L'application $\| \ \|_\infty$ se restreint en une norme sur l'espace vectoriel complexe l^∞.

(c) Les espaces vectoriels normés l^p avec $p \in [1, +\infty[$ et l^∞ sont des espaces de Banach.

Cas particulier (suites de nombres complexes nulles à partir du $n + 1^{\text{ème}}$ terme)

On fixe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On pose, pour tout $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$: $\|(x_1, ..., x_n)\|_1 := |x_1| + \cdots + |x_n|$, $\|(x_1, ..., x_n)\|_2 := \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}$, et $\|(x_1, ..., x_n)\|_\infty := \max(|x_1|, ..., |x_n|)$.

Chacune des applications $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$, et $\| \ \|_\infty$ est une norme sur l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$.

$(\star)$ On verra plus tard que toutes les normes sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes.
$(\star\star)$ Des distances d_1 et d_2 associées à des normes N_1 et N_2 sur E sont topologiquement équivalentes (resp. uniformément équivalentes, Lipschitz-équivalentes) si et seulement si les normes N_1 et N_2 sont équivalentes.

Définition

On se donne une norme $\| \ \|_E$ sur E.

(a) Soient $a, b \in E$. Le *segment* $[a, b]$ est l'ensemble suivant : $[a, b] := \{a + t(b - a) \ ; \ t \in [0, 1]\}$.

(b) On dit qu'une partie U de E est *convexe* si : $[a, b] \subseteq U$ pour tous $a, b \in U$.

Définition-Proposition

On se donne des normes $\| \ \|_E$ et $\| \ \|_F$ sur E et F.

L'espace vectoriel produit $E \times F$, formé des couples (v, w) avec $v \in E$ et $w \in F$, est muni de la *norme 2 du produit* $\| \ \|_{E\times F}$ définie par : $\|(v, w)\|_{E\times F} := \sqrt{\| v\|_E^2 + \|w \|_F^2}$ pour tout $(v, w) \in E\times F$.(*)

Définition-Proposition

On se donne une norme $\| \ \|_E$ sur E.

(a) Une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de E converge vers un élément a de E si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\|x_n - a\|_E < \varepsilon$ dès que $n > N$.

(b) On dit qu'une série $(\sum a_n)_{n\geq 0}$ dans E, c'est à dire une suite de la forme $\Big((a_n)_{n\geq 0}, (\sum\limits_{k=0}^{n} a_k)_{n\geq 0}\Big)$ avec $a_n \in E$ pour tout $n \geq 0$, converge absolument si la série $(\sum \|a_n\|_E)_{n\geq 0}$ converge dans $\mathbb{R}$.

Proposition

On se donne des normes $\| \ \|_E$, $\| \ \|_F$, $\| \ \|_G$ sur E, F, G, et deux normes N_1 et N_2 sur E.

(a) Une application linéaire $u \colon E \to F$ est continue si et seulement s'il existe $k \geq 0$ tel que :

$$\|u(x)\|_F \leq k \, \|x\|_E \quad \text{pour tout } x \in E.$$

Ainsi N_1 et N_2 sont équivalentes si et seulement si $\mathrm{id}_E \colon (E, N_1) \to (E, N_2)$ est bicontinue.

(b) Lorsque E est de dimension finie : toute application linéaire de E dans F est continue (une base $(e_1, ..., e_n)$ de E fournit une norme $N \colon \sum\limits_{1\leq i\leq n} x_i e_i \mapsto \max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i|$ qui s'avère équivalente à $\| \ \|_E$).

(c) Une application bilinéaire $\pi \colon E\times F \to G$ est continue si et seulement s'il existe $k \geq 0$ tel que :

$$\|\pi(x, y)\|_G \leq k \, \|x\|_E \, \|y\|_F \quad \text{pour tout } (x, y) \in E \times F.$$

(d) La somme de $E \times E$ dans E et la multiplication par un scalaire de $\mathbb{K} \times E$ dans E sont des applications continues (cas particuliers respectivement de (a) et de (c)).

Définition-Proposition

On se donne des normes $\| \ \|_E$, $\| \ \|_F$, et $\| \ \|_G$ sur E, F, et G.

(a) On note $\mathscr{L}(E, F)$ l'espace vectoriel formé des applications linéaires continues de E dans F. On pose : $E' = \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$. C'est le sous-espace vectoriel de E^* formé des formes linéaires continues.

(b) On appelle *norme subordonnée à* $\| \ \|_E$ *et* $\| \ \|_F$ la norme $\| \ \|$ sur $\mathscr{L}(E, F)$ définie par :

$$\|u\| := \underbrace{\sup_{\substack{x\in E \\ x\neq 0}} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}}_{\text{(ce sup dans } \mathbb{R}^+ \text{ vaut par convention 0 quand } E = \{0\})} \quad \text{pour tout } u \in \mathscr{L}(E, F). \qquad (**)$$

En particulier, on a : si $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $x \in E$, alors $\|u(x)\|_F \leq \|u\|\|x\|_E$.

(c) Si $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, G)$, alors $v \circ u \in \mathscr{L}(E, G)$ et $\|v \circ u\| \leq \|v\|\|u\|$.

$(*)$ Comme les normes $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$, et $\| \ \|_\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ sont équivalentes, cette norme $\| \ \|_{E\times F}$ est équivalente aux normes $(v, w) \mapsto \| v\|_E + \|w \|_F$ et $(v, w) \mapsto \max(\| v\|_E, \|w \|_F)$ sur $E \times F$.

$(**)$ Le nombre $\|u\|$ est donc le plus petit réel $k \geq 0$ vérifiant : $\|u(x)\|_F \leq k \, \|x\|_E$ pour tout $x \in E$.

Suites de fonctions : rappels (J-Y D)

Proposition (curiosité)

Soient X un espace topologique X, $\Omega \subseteq X$, $f_n \colon \Omega \to \mathbb{C}$ pour $n \in \mathbb{N}$, $F \colon \Omega \to \mathbb{C}$, et $a \in \overline{\Omega}$.

On suppose que $\left|\begin{array}{l} f_n(x) \text{ a une limite quand } x \underset{x\in\Omega}{\to} a \text{ pour chaque } n \in \mathbb{N}\,; \\ (f_n)_{n\geq 0} \text{ converge uniformément vers } F. \end{array}\right.$

Alors $F(x)$ a une limite quand $x \underset{x\in\Omega}{\to} a$ et : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in\Omega}} f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in\Omega}} F(x)$ « interversion des limites ».

On obtient comme corollaire le résultat suivant.

Proposition 1 (« théorème convergence uniforme + continuité »)

Soient Ω un espace topologique, $f_n \colon \Omega \to \mathbb{C}$ pour $n \in \mathbb{N}$, et $F \colon \Omega \to \mathbb{C}$, et $a \in \Omega$.

On suppose que $\left|\begin{array}{l} f_n \text{ est continue en } a \text{ pour chaque } n \in \mathbb{N}\,; \\ (f_n)_{n\geq 0} \text{ converge uniformément vers } F. \end{array}\right.$

Alors F est continue en a.

Proposition 2 (« théorème convergence uniforme + différentiabilité »)

Soient Ω un ouvert convexe de $\mathbb{R}^N$ et $f_n \colon \Omega \to \mathbb{C}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

On suppose que $\left|\begin{array}{l} f_n \text{ est différentiable pour chaque } n \in \mathbb{N}\,; \\ \text{il existe } x_0 \in \Omega \text{ pour lequel la suite } \big(f_n(x_0)\big)_{n\geq 0} \text{ converge}\,; \\ \text{la suite } (\mathrm{d}f_n)_{n\geq 0} \text{ converge uniformément.} \end{array}\right.$

Alors $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur toute partie bornée de Ω vers une fonction différentiable F telle que : $\mathrm{d}F(x)\cdot h = \lim\limits_{n\to+\infty} (\mathrm{d}f_n(x)\cdot h)$ pour $x \in \Omega$ et $h \in \mathbb{R}^N$.

Proposition 3 (« continuité et dérivabilité d'une intégrale dépendant d'un paramètre »)

Soient $[a,b]$ un segment ($a<b$), Ω une partie de $\mathbb{R}^N$ et I un intervalle infini.

(a) Si $f \colon [a,b]\times\Omega \to \mathbb{C}$ est continue, alors $F \colon x \mapsto \int_a^b f(t,x)\,\mathrm{d}t$ est continue sur Ω.

(b) Si $f \colon [a,b]\times I \to \mathbb{C}$ est continue et $\frac{\partial f}{\partial x}$ est définie et continue, alors $F \colon x \mapsto \int_a^b f(t,x)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur I et $F' \colon x \mapsto \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,\mathrm{d}t$.

On se donne maintenant un espace mesurable T muni d'une mesure positive μ, et des applications f_t, $t \in T$, d'un espace métrique Ω de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{C}$. Quand $T = \mathbb{N}$ avec la mesure de comptage, les propositions 1' et 2' donneront les proposition 1 et 2 dans le cas de la convergence normale.

Théorème (« théorème de convergence dominée ») (∗)

On considère des applications φ_n, $n \in \mathbb{N}$, de T dans $\mathbb{C}$.

On suppose que $\left|\begin{array}{ll} \text{(i)} & \text{la suite } (\varphi_n(t))_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge pour } \mu\text{-presque tout } t \in T\,; \\ \text{(ii)} & \text{l'application } t \mapsto \varphi_n(t) \text{ est mesurable pour tout } n \in \mathbb{N}\,; \\ \text{(iii)} & \text{il existe } g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu) \text{ tel que } \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |\varphi_n(t)| \leq g(t) \ \mu\text{-p. p.}. \end{array}\right.$

Alors $\left|\begin{array}{l} \text{il existe } \varphi \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu) \text{ tel que } \varphi_n(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi(t) \ \mu\text{-p. p.}\,; \\ \underbrace{\int_T \varphi_n(t)\,\mathrm{d}\mu(t)}_{\text{défini}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_T \varphi(t)\,\mathrm{d}\mu(t)\,. \end{array}\right.$

(∗) En particulier : si une suite d'applications continues $f_n \colon [a,b] \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ converge uniformément vers f, alors $\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ (prendre $T=[a,b]$ et $\varphi_n = f_n - f$).

Proposition 1' (« continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre »)

On fixe $a \in \Omega$.

On suppose que
$$\left|\begin{array}{ll} \text{(i)} & \text{l'application } \ t \mapsto f_t(x) \ \text{ est mesurable pour tout } \ x \in \Omega\,; \\ \text{(ii)} & f_t \text{ est continue en } a \text{ pour } \mu\text{-presque tout } \ t \in T\,; \\ \text{(iii)} & \text{il existe } \ g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu) \ \text{ tel que } \ \sup\limits_{x\in\Omega} |f_t(x)| \leq g(t) \ \ \mu\text{-p. p.}. \end{array}\right.$$

Alors l'application $F\colon x \mapsto \underbrace{\int_T f_t(x)\,\mathrm{d}\mu(t)}_{\text{défini}}$ est continue en a.

Démonstration (idée)

Pour tout $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Omega^{\mathbb{N}}$ vérifiant $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$, le théorème de convergence dominée montre que :
$$F(x_n) = \int_T f_t(x_n)\,\mathrm{d}\nu(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} F(a) = \int_T f_t(a)\,\mathrm{d}\nu(t). \qquad \square$$

Proposition 2' (« différentiation d'une intégrale dépendant d'un paramètre »)

On suppose ici que $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ est un ouvert de $\mathbb{R}^N$.

On suppose que
$$\left|\begin{array}{ll} \text{(i)} & \text{l'application } \ t \mapsto f_t(x) \ \text{ appartient à } \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu) \text{ pour tout } \ x \in \Omega\,; \\ \text{(ii)} & f_t \text{ est différentiable sur } \Omega \text{ pour } \mu\text{-presque tout } \ t \in T\,; \quad {}^{(*)} \\ \text{(iii)} & \text{il existe } \ \widetilde{g} \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu) \ \text{ tel que } \ \sup\limits_{x\in\Omega} \|\mathrm{d}f_t(x)\| \leq \widetilde{g}(t) \ \ \mu\text{-p. p.}. \end{array}\right.$$

Alors
$$\left|\begin{array}{l} \text{l'application } \ F\colon x \mapsto \int_T f_t(x)\,\mathrm{d}\mu(t) \ \text{ est différentiable sur } \Omega\,; \\ \mathrm{d}F(x)\cdot h = \underbrace{\int_T \mathrm{d}f_t(x)\cdot h \,\mathrm{d}\mu(t)}_{\text{défini}} \ \text{ pour tous } x \in \Omega \text{ et } h \in \mathbb{R}^N. \end{array}\right.$$

Démonstration (idée)

Soit $a \in \Omega$. On se donne $h_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ dans $\mathbb{R}^N$ avec $h_n \neq 0$ et $[a, a+h_n] \subseteq \Omega$ pour $n \geq 0$. On a :
$$\frac{F(a+h_n) - F(a) - \int_T \mathrm{d}f_t(a)\cdot h_n\,\mathrm{d}\mu(t)}{\|h_n\|} = \int_T \frac{f_t(a+h_n) - f_t(a) - \mathrm{d}f_t(a)\cdot h_n}{\|h_n\|}\,\mathrm{d}\mu(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \ \text{ car}$$
$$\frac{|f_t(a+h_n) - f_t(a) - \mathrm{d}f_t(a)\cdot h_n|}{\|h_n\|} \leq \sup_{0\leq\theta\leq1} \|\mathrm{d}f_t(a+\theta h_n) - \mathrm{d}f_t(a)\| \ \text{ pour } \mu\text{-presque tout } \ t \in T. \qquad \square$$

Proposition 3' (« holomorphie d'une intégrale dépendant d'un paramètre »)

On choisit maintenant pour Ω un ouvert de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

On suppose que
$$\left|\begin{array}{ll} \text{(i)} & \text{l'application } \ t \mapsto f_t(z) \ \text{ est mesurable pour tout } \ z \in \Omega\,; \\ \text{(ii)} & f_t \text{ est holomorphe sur } \Omega \text{ pour } \mu\text{-presque tout } \ t \in T\,; \\ \text{(iii)} & \text{il existe } \ g \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu) \ \text{ tel que } \ \sup\limits_{z\in\Omega} |f_t(z)| \leq g(t) \ \ \mu\text{-p. p.}. \end{array}\right.$$

Alors
$$\left|\begin{array}{l} \text{l'application } \ F\colon z \mapsto \int_T f_t(z)\,\mathrm{d}\mu(t) \ \text{ est holomorphe sur } \Omega\,; \\ F^{(n)}(z) = \underbrace{\int_T f_t^{(n)}(z)\,\mathrm{d}\mu(t)}_{\text{défini}} \ \text{ pour tous } n \in \mathbb{N} \text{ et } z \in \Omega. \end{array}\right.$$

Démonstration (idée)

On rappelle qu'une application $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ est holomorphe si et seulement si elle est différentiable et l'application $\mathrm{d}f(z)$ est $\mathbb{C}$-linéaire pour tout $z \in \Omega$ (équation de Cauchy-Riemann). Dans ce cas, pour tout $z \in \Omega$ on dispose d'un unique $f'(z) \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{d}f(z)\colon h \in \mathbb{C} \mapsto f'(z)\,h$.

Soient $a \in \Omega$ et $r > 0$ tels que $\overline{B(a,r)} \subseteq \Omega$. Toute fonction holomorphe $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ vérifie : $f'(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathscr{C}(a,r)^+} \frac{f(u)}{(u-z)^2}\,\mathrm{d}u$ pour tout $z \in B(a,r)$ (cf. l'analycité des fonctions holomorphes).

D'où : $\sup\limits_{z\in B(a,\frac{r}{2})} |f_t'(z)| = \sup\limits_{z\in B(a,\frac{r}{2})} \left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathscr{C}(a,r)^+} \frac{f_t(u)}{(u-z)^2}\,\mathrm{d}u\right| \leq \frac{1}{2i\pi} \times 2\pi r \times \frac{g(t)}{(\frac{r}{2})^2}$ μ-presque partout.

Ainsi, la famille $(f_t'|_{B(a,\frac{r}{2})})_{t\in T}$ vérifie une hypothèses analogue à (iii) qui porte sur $(f_t)_{t\in T}$.

On applique la proposition 2' sur l'ouvert $B(a,\frac{r}{2})$ qui contient $z := a$, puis fait une récurrence. $\square$

$(*)$ Lorsque Ω est convexe et $x_0 \in \Omega$, l'inégalité des accroissements finis permet de remplacer la condition (ii) par la condition suivante : « l'application $t \mapsto f_t(x)$ est mesurable pour tout $x \in \Omega$ et $t \mapsto f_t(x_0)$ appartient à $\mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ ».